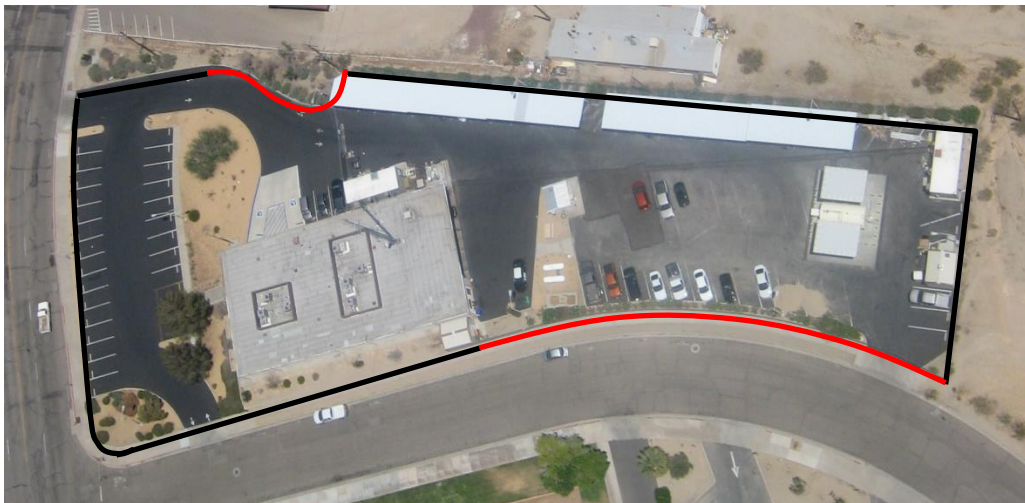


### 3.4 การคำนวณเนื้อที่บริเวณที่มีส่วนโค้งวงกลม

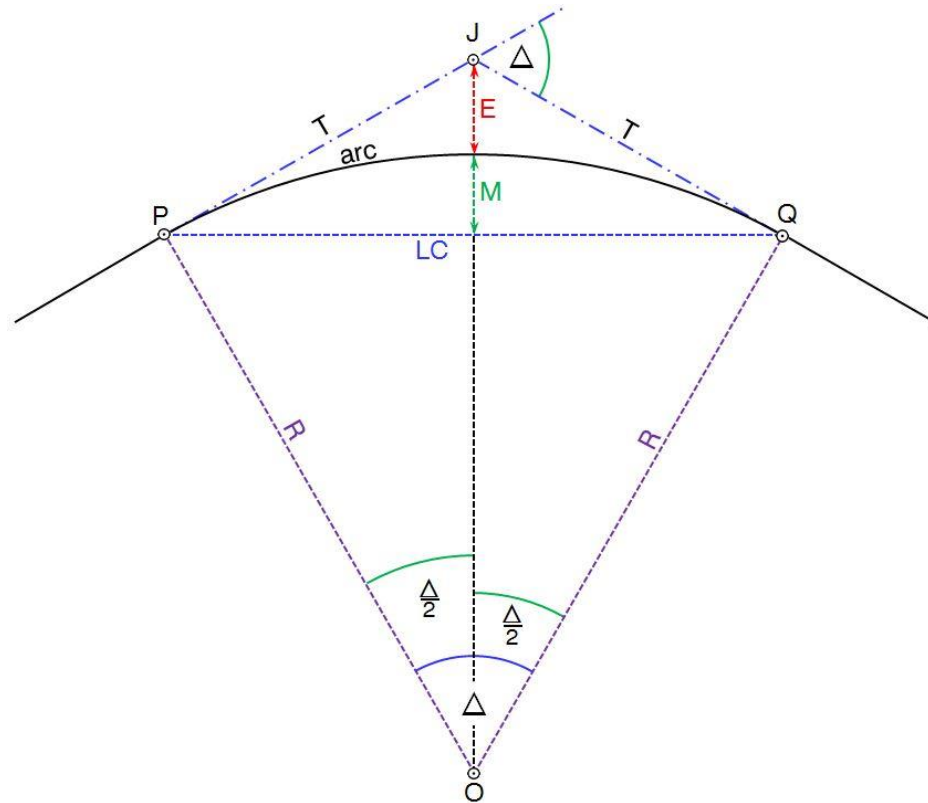
การคำนวณหาพื้นที่ส่วนใหญ่ แนวเขตมักเป็นเส้นตรง ถือเป็นเรื่องปกติทั่วไปของช่างรังวัด หากแต่ในบางครั้ง งานรังวัดอาจมีแนวเขตเป็นส่วนโค้งเข้ามาผสมอยู่ด้วย หรือติดกับทางสาธารณะ ประโยชน์ต่าง ๆ เช่น โค้งถนน โค้งทางรถไฟ โค้งคลองชลประทาน บริเวณที่เป็นถนนวงเวียน หรือ บริเวณที่เป็นมุมถนน เป็นต้น ซึ่งลักษณะของโค้งโดยมากแล้วจะเป็นส่วนของโค้งวงกลม การคำนวณ จึงต้องอาศัยหลักการของเรขาคณิตเข้ามาช่วย และเพื่อให้มองเห็นภาพชัดเจนมากขึ้น ให้พิจารณาจาก ภาพองค์ประกอบของโค้งวงกลมดังนี้



รูปที่ 3.4.1 ตัวอย่างพื้นที่ที่มีโค้งถนนเป็นแนวเขตพื้นที่ส่วนหนึ่ง



รูปที่ 3.4.2 ตัวอย่างพื้นที่ที่มีแนวเขตเป็นโค้งลำคลอง



รูปที่ 3.4.3 แสดงองค์ประกอบต่าง ๆ ของโค้งวงกลม

จากภาพ

- T = ความยาวของเส้นสัมผัสโค้งวงกลมเท่ากับ JQ และ JP
- R = รัศมีโค้งวงกลม และตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมตามกฎเรขาคณิต
- arc = ความยาวตามแนวโค้ง PQ ที่สามารถวัดหรือคำนวณได้
- P, Q = เป็นจุดปลายของโค้งวงกลม
- $\overline{PQ}$  = ความยาวของเส้นคอร์ดของวงกลมเท่ากับ LC
- $\Delta$  = มุมเห (Intersection) เป็นมุมรองรับส่วนโค้งวงกลม

ข้อควรจำ เมื่อต้องคำนวณเกี่ยวกับโค้งวงกลม คือ เส้นที่ลากจากจุดสัมผัสของวงกลมนั้น ย่อมตั้งฉากกับรัศมีวงกลม และแบ่งครึ่งมุมที่รองรับส่วนโค้งวงกลมเสมอ

3.4.1 การคำนวณหาส่วนต่าง ๆ ของโค้งวงกลม ส่วนต่าง ๆ ของโค้งวงกลมในที่นี่ ได้จะใช้สูตรคำนวณบางสูตรที่เกี่ยวข้องกับโค้งวงกลม จากรายวิชา การสำรวจเส้นทาง<sup>1</sup> ดังนี้

ความยาวของเส้นสัมผัส (Tangent = T)

$$T = R \cdot \tan \frac{\Delta}{2} \quad \dots\dots\dots (3.4.1)$$

<sup>1</sup>ที่มา : ยรรยง ทรัพย์สุขอนแก่น, การสำรวจเส้นทาง 2553. (หน้า 177-183)

ความยาวของเส้นคอร์ด (Length of Chord = LC)

$$LC = 2R \cdot \sin \frac{\Delta}{2} \quad \dots\dots\dots (3.4.2)$$

มุมสัมพันธ์โค้ง (Degrees of curve = D)

$$D = \frac{5729.577951}{R} \quad \dots\dots\dots (3.4.3)$$

ความยาวของโค้งวงกลม (Length of curve = Lc หรือ arc)

$$\text{arc} = 100 \frac{\Delta}{D} \quad \dots\dots\dots (3.4.4)$$

หรือ

$$\text{arc} = \pi \cdot R \cdot \frac{\Delta}{180} \quad \dots\dots\dots (3.4.5)$$

หรือ

$$\text{arc} = R \cdot \Delta^{\text{rad}} \quad \dots\dots\dots (3.4.6)$$

ความยาว ณ กึ่งกลางคอร์ดถึงกึ่งกลางโค้ง (Middle ordinate = M)

$$M = R \left( 1 - \cos \frac{\Delta}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (3.4.7)$$

ความยาว ณ กึ่งกลางโค้งถึงจุดตัดของเส้นสัมผัส (External distance = E)

$$E = R \left( \sec \frac{\Delta}{2} - 1 \right) \quad \dots\dots\dots (3.4.8)$$

หรือ

$$E = T \cdot \tan \frac{\Delta}{4} \quad \dots\dots\dots (3.4.9)$$

ความยาวของรัศมีโค้งวงกลม (Radius of curve = R)

$$R = T \cdot \cot \frac{\Delta}{2} \quad \dots\dots\dots (3.4.10)$$

หรือ

$$R = \frac{5729.577951}{D} \quad \dots\dots\dots (3.4.11)$$

สมการต่าง ๆ ในที่นี้ สามารถปรับเปลี่ยน เพื่อประโยชน์ในการคำนวณแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้อีกหลายทาง

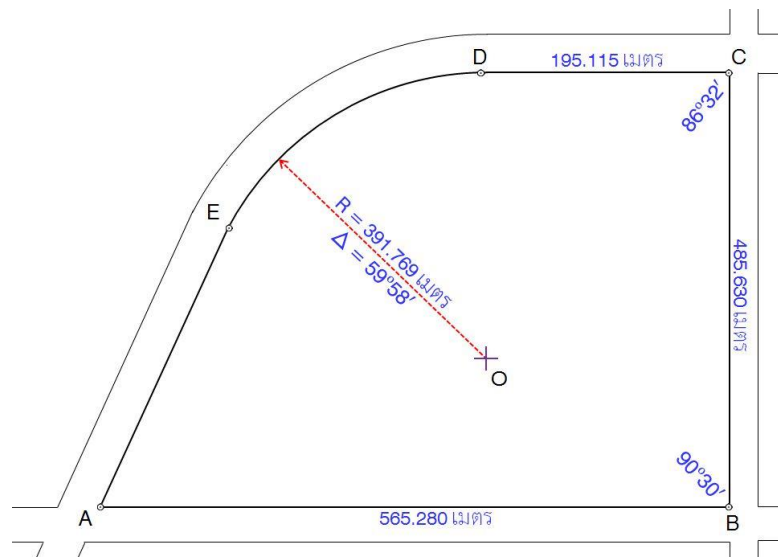


3.4.2.3 พื้นที่ตอนล่างของคอร์ค หรือพื้นที่ ③

$$\text{พื้นที่ ③} = \frac{LC(R - M)}{2} \dots\dots\dots (3.4.16)$$

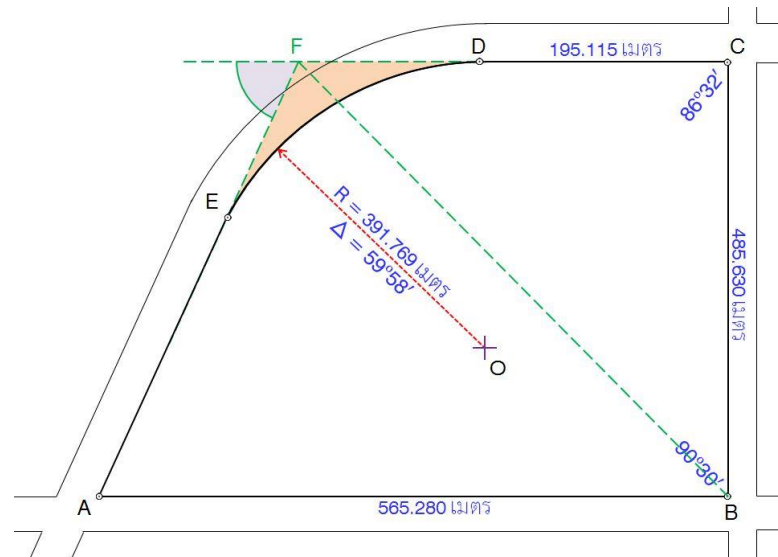
$$\text{หรือ} = \frac{R^2 \cdot \sin \Delta}{2} \dots\dots\dots (3.4.17)$$

ตัวอย่างที่ 3.4.1 จากรูปแผนที่สังเขปต่อไปนี้ จงคำนวณหาพื้นที่ในหน่วยวัดของไทย เมื่อให้ D และ E เป็นจุดปลายของโค้งวงกลม



แนวคิด

- ขั้นที่ 1 คำนวณหาค่าประกอบของรูปที่ขาดหายไป เพื่อการคำนวณหาพื้นที่  
 ก) สร้างรูปเพิ่มเติม โดยลากแนวต่าง ๆ ดังนี้



จากรูป เมื่อ D, E เป็นจุดปลายของโค้งวงกลม จะเห็นได้ว่าต่อเส้นตรงตามแนว CD ไปทางจุด D แล้วต่อแนว AE ไปทางจุด E ตัดแนวแรกที่จุด F จะได้มุม Δ ดังรูป

จากนั้นให้ลากเส้นตรง **FB** จะได้รูปสามเหลี่ยม 2 รูป คือ  $\triangle BCF$  และ  $\triangle ABF$  ซึ่งเมื่อคำนวณหาพื้นที่ได้ ก็ต้องลดพื้นที่ส่วนที่แรเงา (สีส้ม) ออกไปจะได้พื้นที่ตามต้องการ

ข) คำนวณหาส่วนประกอบที่ต้องการ ลำดับได้ดังนี้

(ก) หาความยาวของ **CF** เมื่อ

$$CF = CD + DF$$

ขณะที่

$$CD = \text{เป็นด้านของรูปแผนที่ที่กำหนดให้} = 195.115 \text{ เมตร}$$

$$DF = \text{เป็นความยาวของเส้นสัมผัสโค้ง หาได้ดังนี้}$$

$$\begin{aligned} T &= R \cdot \tan \frac{\Delta}{2} \\ &= 391.769 \times \tan \frac{59^\circ 58'}{2} \\ &= 226.036015144 \rightarrow \underline{226.036} \text{ เมตร} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} CF &= 195.115 + 226.226.036015144 \\ &= 421.151015144 \rightarrow \underline{421.151} \text{ เมตร} \end{aligned}$$

(ข) หาความยาว **BF** จากสมการ (2.6.2) ซึ่งเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$BF^2 = CF^2 + CB^2 - 2(CF)(CB) \cdot \cos \hat{BCF}$$

แทนค่า

$$\begin{aligned} BF &= \sqrt{421.151015144^2 + 485.63^2 \dots} \\ &\quad \dots - (2 \times 421.151015144 \dots) \\ &\quad \dots \times 485.63 \times \cos 86^\circ 32'} \\ BF &= 623.273999607 \rightarrow \underline{623.274} \text{ เมตร} \end{aligned}$$

(ค) หามุม  $\hat{CBF}$  จากสมการ (2.3.2) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\sin \hat{CBF} = \frac{CF \times \sin \hat{BCF}}{BF}$$

แทนค่า

$$\begin{aligned} \sin \hat{CBF} &= \frac{421.151015144 \times \sin 86^\circ 32'}{623.2739996065} \\ &= 0.674471213 \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{CBF} = 42.413100281^\circ \rightarrow \underline{42^\circ 24' 47.16''}$$

(ง) หาความยาวของ AF จากสมการ (2.6.2) ซึ่งเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2(AB)(BF) \cdot \cos \hat{A}BF$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \hat{A}BF &= \hat{A}BC - \hat{C}BF = 90^\circ 30' - 42^\circ 24' 47.16'' \\ &= 48^\circ 05' 12.84'' \end{aligned}$$

$$AB = \text{ระยะทางที่กำหนดให้} = 565.280 \text{ เมตร}$$

$$BF = 623.273999607 \text{ เมตร}$$

แทนค่า

$$AF = \sqrt{623.273999607^2 + 565.28^2 \dots - (2 \times 623.273999607 \dots \times 565.28 \times \cos 48^\circ 05' 12.84'')}$$

$$\therefore AF = 487.139343897 \rightarrow \underline{487.139} \text{ เมตร}$$

ขั้นที่ 2 คำนวณหาพื้นที่ของรูปแผนที่ ด้วยสมการ (3.1.4) ดังนี้

$$\text{พื้นที่ } \Delta \text{ ใด ๆ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ก) ในรูป  $\Delta BCF$  หาพื้นที่ได้ดังนี้

$$\text{ให้ } a = BC = 485.630 \text{ เมตร}$$

$$b = CF = 421.151 \text{ เมตร}$$

$$c = BF = 623.274 \text{ เมตร}$$

ดังนั้น

$$s = \frac{485.63 + 421.151 + 623.274}{2} = 765.0275$$

แทนค่า เพื่อหาพื้นที่

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \Delta BCF &= \sqrt{765.0275 \times (765.0275 - 485.63) \\ &\quad \times (765.0275 - 421.151) \\ &\quad \times (765.0275 - 623.274)} \\ &= \sqrt{1.04200126 \times 10^{10}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{พื้นที่ } \Delta BCF = \underline{102,078.533} \text{ ตารางเมตร}$$

ข) ในรูป  $\Delta ABF$  หาพื้นที่ได้ดังนี้

$$\text{ให้ } a = AB = 565.280 \text{ เมตร}$$

$$b = BF = 623.274 \text{ เมตร}$$

$$c = AF = 487.139 \text{ เมตร}$$

ดังนั้น

$$s = \frac{565.28 + 623.274 + 487.139}{2} = 837.849$$

แทนค่า เพื่อหาพื้นที่

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABF &= \sqrt{\begin{matrix} 837.849 \times (837.849 - 565.28) \\ \times (837.849 - 623.284) \\ \times (837.849 - 487.134) \end{matrix}} \\ &= \sqrt{1.71852335 \times 10^{10}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{พื้นที่ } \triangle ABF = \underline{131,092.462} \text{ ตารางเมตร}$$

ค) ในรูปแรงงาส่วนโค้ง หาพื้นที่ได้จากสมการ (3.4.12) ดังนี้

$$\text{พื้นที่} = R^2 \left( \tan \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi \cdot \Delta}{360} \right)$$

เมื่อ

$$R = \text{รัศมีโค้งวงกลม} = 391.769 \text{ เมตร}$$

$$\Delta = \text{มุมเหของโค้งวงกลม} = 59^{\circ}58'$$

แทนค่า

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่} &= 391.769^2 \left( \tan \frac{59^{\circ}58'}{2} - \frac{\pi \cdot 59^{\circ}58'}{360^{\circ}} \right) \\ &= \underline{8,235.066} \text{ ตารางเมตร} \end{aligned}$$

ง) หาพื้นที่จริงของที่ดินทั้งผืน ดังนี้

$$\text{พื้นที่ } \triangle BCF = 102,078.533 \text{ ตารางเมตร}$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABF = 131,092.462 \text{ ตารางเมตร}$$

$$\text{พื้นที่แรงงาส่วนโค้ง} = \underline{8,235.066} \text{ ตารางเมตร}$$

$$\therefore \text{พื้นที่จริงของที่ดิน} = \underline{224,935.929} \text{ ตารางเมตร}$$

เนื่องจากโจทย์ต้องการในหน่วยวัดของไทย ดังนั้นแปลงพื้นที่จาก ตารางเมตร เป็น ไร่-งาน-ตารางวา ดังนี้

$$\text{เมื่อพื้นที่ } 1,600 \text{ ตารางเมตร} = 1 \text{ ไร่}$$

$$\text{ดังนั้น } 224,935.929 \text{ ตารางเมตร} = \frac{224935.929}{1600} \text{ ไร่}$$

$$= 140.5849556 \text{ ไร่}$$

$$\text{ลบจำนวน ไร่ (เลขหน้าจุดทศนิยม)} = -140 \text{ ไร่}$$

$$= 0.5849556 \text{ ไร่}$$

$$= 0.5849556 \text{ ไร่}$$



หน่วยที่ 3 การคำนวณเนื้อที่ของรูปเหลี่ยมต่าง ๆ และการคำนวณปริมาตร

---

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } 1 \text{ ไร่} &= 4 \text{ ตารางวา ดังนั้น} &= &\times 4 \\ & &= &2.3398225 \text{ งาน} \\ \text{ลบจำนวน งาน (เลขหน้าจุดทศนิยม)} & &= &-2 \text{ งาน} \\ & &= &0.3398225 \text{ งาน} \\ \text{และ } 1 \text{ งาน} &= 100 \text{ ตารางวา ดังนั้น} &= &\times 100 \\ & &= &33.98225 \text{ ตารางวา} \\ \text{ค่าของตารางวา ใช้ทศนิยมไม่เกิน 2 เท่านั้น ดังนั้น} &= &33.98 \text{ ตารางวา} \\ \therefore \text{พื้นที่ในหน่วยวัดของไทย คือ } &140 \text{ ไร่ } 2 \text{ งาน } 33.98 \text{ ตารางวา} \end{aligned}$$

ตอบ

---