

ในหน่วยนี้จะเป็นการศึกษาเกี่ยวกับ การคำนวณหาเนื้อที่ของรูปเหลี่ยมต่าง ๆ ในแผนที่ และเมื่อรูปแผนที่ที่เกือบทุกฉบับ ที่มีการรังวัดตามหลักการสำรวจแล้ว มักมีลักษณะต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิต รวมตัวกันอยู่หลายรูปในแผนที่ฉบับหนึ่ง เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม หรือรูปหลายเหลี่ยม หรือแผนที่ที่มีขอบเขตเป็นลักษณะแนวคดโค้ง ไม่เป็นเส้นตรง เป็นต้น ตลอดจนการคำนวณปริมาตรของรูปแผนที่ในแบบต่าง ๆ เพื่อนำผลลัพธ์ไปใช้ประโยชน์ต่าง ๆ ทั้งนี้เพื่อเป็นการพัฒนาความคิดและเสริมทักษะการคำนวณของนักเรียนขั้นพื้นฐานให้สูงขึ้นต่อไปโดยลำดับต่อไป

3.1 การคำนวณเนื้อที่ของรูปเหลี่ยมต่าง ๆ

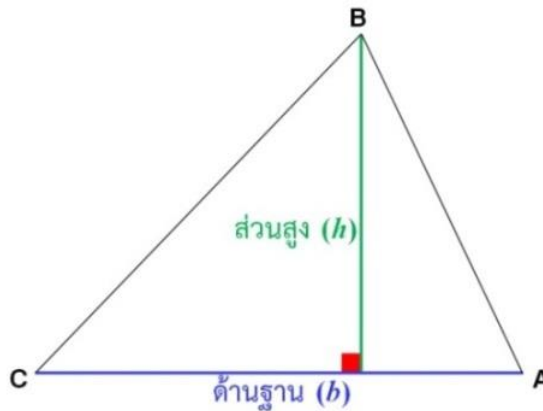
การคำนวณเนื้อที่ ถือได้ว่ามีความจำเป็นต่องานในด้านวิศวกรรมอย่างมาก ทั้งนี้เพื่อนำไปใช้ในการวางแผน การออกแบบก่อสร้างต่าง ๆ เป็นต้น การหาเนื้อที่บนแผนที่ที่แสดงกรรมสิทธิ์ในที่ดิน หรือแผนที่แสดงการจัดสรรที่ดิน เนื้อที่ของงานสำรวจเหล่านี้ มักเป็นเนื้อที่ของรูปเหลี่ยมต่าง ๆ ที่ได้จากการรังวัดระยะ และทิศทางบนพื้นระนาบ แล้วนำข้อมูลรังวัดต่าง ๆ มาคำนวณหาหรือวัดหาเนื้อที่ โดยเส้นรอบรูปพื้นที่อาจเป็นเส้นตรงและหรือคดโค้งก็ได้ ในระดับพื้นฐานนี้ สามารถจำแนกรูปแบบการคำนวณออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ ๆ ดังนี้

3.1.1 การคำนวณพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

รูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ นับเป็นรูปเรขาคณิตขั้นพื้นฐานงานคำนวณต่าง ๆ มากมาย โดยเฉพาะงานของช่างสำรวจ ส่วนมากอาศัยหลักการทางเรขาคณิตและสมการทางตรีโกณมิติพื้นราบเข้ามาช่วยแก้ปัญหาต่าง ๆ ในการคำนวณ อย่างไรก็ตามงานคำนวณหาพื้นที่รูปเหลี่ยมต่าง ๆ¹ สามารถคำนวณหาได้ ตามลักษณะของข้อมูลที่ได้มาดังนี้

¹ ที่มา : ยรรยง ทรัพย์สุขอำนวย. วิศวกรรมสำรวจ 1. 2550. (หน้า 337)

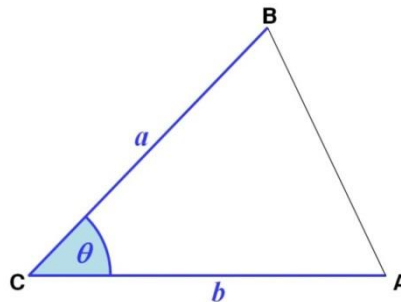
3.1.1.1 รูปสามเหลี่ยมที่รู้ความยาวของเส้นฐานและส่วนสูงของรูป



รูปที่ 3.1.1 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ เมื่อทราบความยาวของเส้นฐานและส่วนสูงของรูป

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \quad \dots\dots\dots (3.1.1)$$

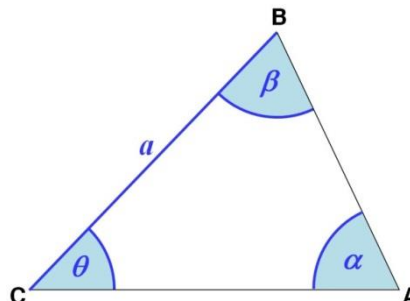
3.1.1.2 รูปสามเหลี่ยมที่รู้ความยาวสองด้าน และมุมในระหว่างด้าน



รูปที่ 3.1.2 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ เมื่อรู้ความยาวด้านสองด้าน และมุมในระหว่างด้าน

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta \quad \dots\dots\dots (3.1.2)$$

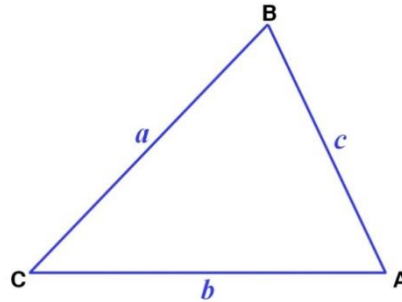
3.1.1.3 รูปสามเหลี่ยมที่รู้มุมภายในทุกมุมและด้านใดด้านหนึ่งของรูป



รูปที่ 3.1.3 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ เมื่อรู้มุมภายในทุกมุมและด้านใดด้านหนึ่งของรูป

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \theta}{2 \cdot \sin \alpha} \quad \dots\dots\dots (3.1.3)$$

3.1.1.4 เมื่อรู้ความยาวของด้านทั้งสาม



รูปที่ 3.1.4 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ เมื่อรู้ความยาวของด้านทั้งสาม

$$\text{พื้นที่ } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \dots\dots\dots (3.1.4)$$

เมื่อ

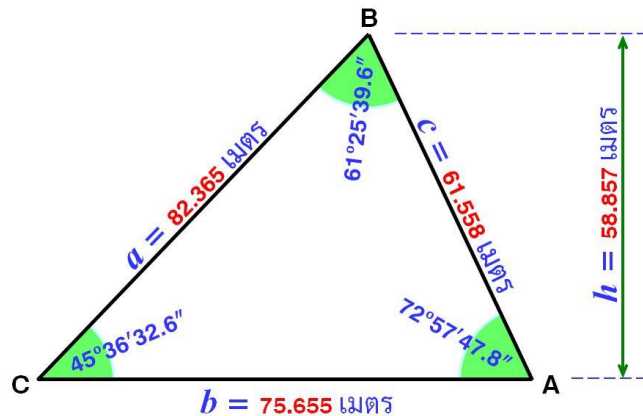
$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

หรือ

$$\text{พื้นที่ } \Delta ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)} \quad \dots (3.1.5)$$

เมื่อ a, b และ c เป็นด้านที่เรียงตามความยาวจากมากไปหาน้อย หรือ $a > b > c$

ตัวอย่างที่ 3.1.1 จงคำนวณหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมในหน่วยวัดของพื้นที่ของไทย โดยใช้สมการ (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) และ (3.1.5) จากข้อมูลในรูปต่อไปนี้



วิธีทำ

ขั้นที่ 1 จากภาพ ทราบข้อมูลต่างๆ ดังนี้

- | | | |
|-----------------------|---|-------------|
| มุมราบ A (α) | = | 72°57'47.8" |
| มุมราบ B (β) | = | 61°25'39.6" |
| มุมราบ C (θ) | = | 45°36'32.6" |

$$\begin{aligned} \text{ด้านตรงข้ามมุม A หรือ } a &= 82.365 \text{ เมตร} \\ \text{ด้านตรงข้ามมุม B หรือ } b &= 75.655 \text{ เมตร} \\ \text{ด้านตรงข้ามมุม C หรือ } c &= 61.558 \text{ เมตร} \\ \text{และส่วนสูงของรูป หรือ } h &= 58.857 \text{ เมตร} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 คำนวณหาพื้นที่ของรูปจากสมการต่าง ๆ ที่กำหนด

1) จากสมการ (3.1.1) ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \frac{1}{2} \times 75.655 \times 58.857 \\ &= \underline{2,226.413168} \text{ ตารางเมตร} \\ \text{หรือ} &= 1 \text{ ไร่ } 1 \text{ งาน } 56.6 \text{ ตารางวา} \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

วิธีการแปลงหน่วยพื้นที่จาก ตารางเมตร ให้เป็น ไร่-งาน-ตารางวา ทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{เมื่อพื้นที่ } 1,600 \text{ ตารางเมตร} &= 1 \text{ ไร่} \\ \text{ดังนั้น พื้นที่ } 2,226.413168 \text{ ตารางเมตร} &= \frac{2226.413168}{1600} \text{ ไร่} \\ &= 1.391508228 \text{ ไร่} \\ \text{ลบจำนวน ไร่ (เลขหน้าจุดทศนิยม)} &= -1 \text{ ไร่} \\ &= 0.391508228 \text{ ไร่} \\ \text{เมื่อ } 1 \text{ ไร่} = 4 \text{ ตารางวา ดังนั้น} &= \times 4 \\ &= 1.566032919 \text{ งาน} \\ \text{ลบจำนวน งาน (เลขหน้าจุดทศนิยม)} &= -1 \text{ งาน} \\ &= 0.566032919 \text{ งาน} \\ \text{และ } 1 \text{ งาน} = 100 \text{ ตารางวา ดังนั้น} &= \times 100 \\ &= 56.6032919 \text{ ตารางวา} \\ \text{ค่าของตารางวา ใช้ทศนิยมไม่เกิน 2 เท่านั้น ดังนั้น} &= 56.60 \text{ ตารางวา} \\ \therefore \text{พื้นที่ในหน่วยวัดของไทย คือ } & 1 \text{ ไร่ } 1 \text{ งาน } 56.6 \text{ ตารางวา} \end{aligned}$$

2) จากสมการ (3.1.2) ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 82.365 \times 75.655 \times \sin 45^\circ 36' 32.6'' \end{aligned}$$

$$= \underline{2.226.399911} \text{ ตารางเมตร}$$

หรือ = 1 ไร่ 1 งาน 56.6 ตารางวา (2)

3) จากสมการ (3.1.3) ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \Delta ABC &= \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \theta}{2 \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{82.365^2 \times \sin 61^\circ 25' 39.6'' \times \sin 45^\circ 36' 32.6''}{2 \times \sin 72^\circ 57' 47.8''} \\ &= \underline{2.226.37077} \text{ ตารางเมตร} \\ \text{หรือ} &= 1 \text{ ไร่ } 1 \text{ งาน } 56.6 \text{ ตารางวา} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

4) จากสมการ (3.1.4) ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \Delta ABC &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ \text{เมื่อ} \\ s &= \frac{a+b+c}{2} = \frac{82.365+75.655+61.558}{2} = \underline{109.789} \\ \text{ทำให้} \\ (s-a) &= 109.789 - 82.365 = 27.424 \\ (s-b) &= 109.789 - 75.655 = 34.134 \\ (s-c) &= 109.789 - 61.558 = 48.231 \\ \text{แทนค่าลงในสมการ} \\ \text{พื้นที่ } \Delta ABC &= \sqrt{109.789 \times 27.424 \times 34.134 \times 48.231} \\ &= \sqrt{4956819.222} \\ &= \underline{2.226.391525} \text{ ตารางเมตร} \\ \text{หรือ} &= 1 \text{ ไร่ } 1 \text{ งาน } 56.6 \text{ ตารางวา} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

5) จากสมการ (3.1.5) ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \Delta ABC &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)} \\ \text{เมื่อ} \\ a &= 82.365 \quad (\text{เรียงตามลำดับความยาว}) \\ b &= 75.655 \\ c &= 61.558 \end{aligned}$$

ทำให้

$$(a+b+c) = 219.578$$

$$(c-a+b) = 54.848$$

$$(c+a-b) = 68.268$$

$$(a+b-c) = 96.462$$

แทนค่าลงในสมการ

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{219.578 \times 54.848 \times 68.268 \times 96.462}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{7930910756}$$

$$= \underline{2.226.391525} \text{ ตารางเมตร}$$

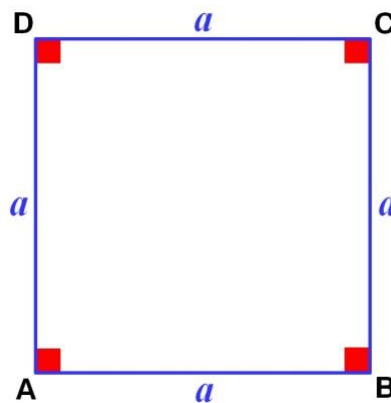
$$\text{หรือ} = 1 \text{ ไร่ } 1 \text{ งาน } 56.6 \text{ ตารางวา} \dots\dots\dots (5)$$

ตอบ

3.1.2 การคำนวณหาเนื้อที่จากรูปสี่เหลี่ยม

ทั่วไปของงานรังวัดแล้ว รูปสี่เหลี่ยม มักเป็นส่วนย่อยของพื้นที่รังวัด แต่ก็มีความสำคัญไม่ยิ่งหย่อนกว่ารูปสามเหลี่ยม และมักจะพบรูปสี่เหลี่ยมในบริเวณริมขอบของพื้นที่เป็นหลักการคำนวณหาพื้นที่ที่สามารถแยกเป็นรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ ดังนี้

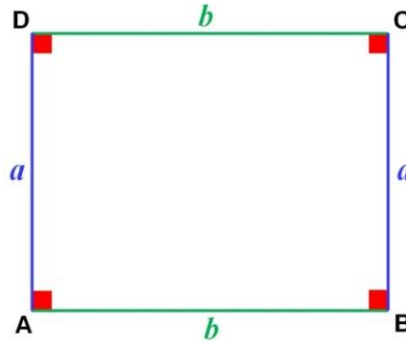
3.1.2.1 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก และเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งและตั้งฉากซึ่งกันและกัน



รูปที่ 3.1.5 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$\text{พื้นที่ } \square ABCDA = a^2 \dots\dots\dots (3.1.6)$$

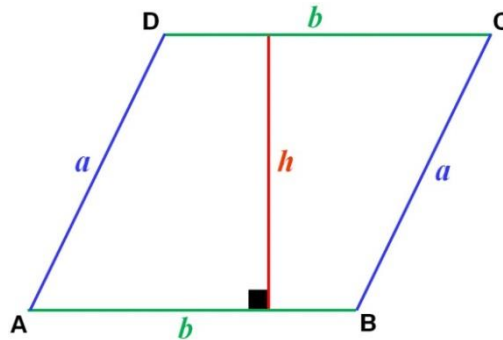
3.1.2.2 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก หรือสี่เหลี่ยมผืนผ้า หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทั้งสี่เป็นมุมฉาก เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



รูปที่ 3.1.6 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก หรือสี่เหลี่ยมผืนผ้า

พื้นที่ $\square ABCDA = a \times b$ (3.1.7)

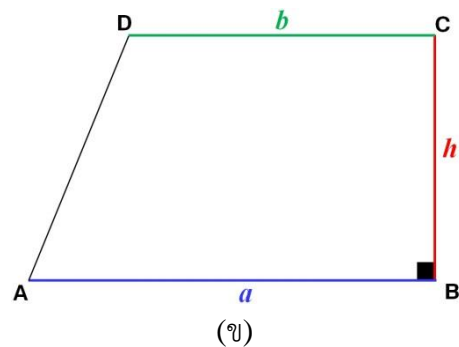
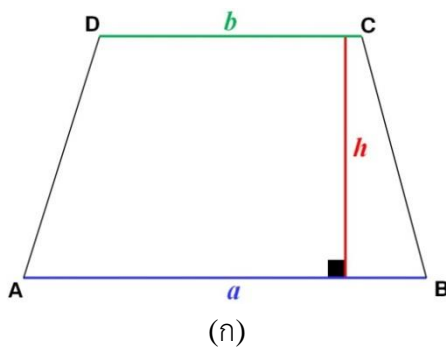
3.1.2.3 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน หรือสี่เหลี่ยมด้านขนาน หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกัน หรือมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน และเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



รูปที่ 3.1.7 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน หรือสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พื้นที่ $\square ABCDA = b \times h$ (3.1.8)

3.1.2.4 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันหนึ่งคู่



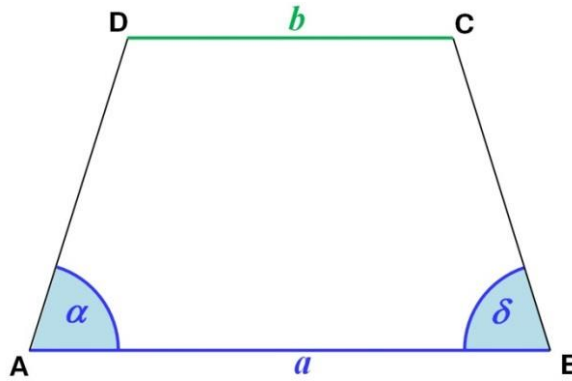
รูปที่ 3.1.8 รูปสี่เหลี่ยมคางหมูแบบต่าง ๆ

พื้นที่ $\square ABCDA = \frac{(a+b)}{2} \times h$ (3.1.9)

3.1.3 การหาพื้นที่จากรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่ทราบข้อมูลบางส่วน

บางครั้งรูปสี่เหลี่ยมในบริเวณที่รังวัด อาจทราบข้อมูลเพียงบางส่วนเท่านั้น แต่ก็ยังพอที่จะคำนวณหาพื้นที่ได้ หากข้อมูลที่ทราบเป็นไปดังนี้

3.1.3.1 กรณีที่ทราบระยะคู่ขนาน และทราบมุมสองมุมที่ปลายของด้านคู่ขนานนั้น

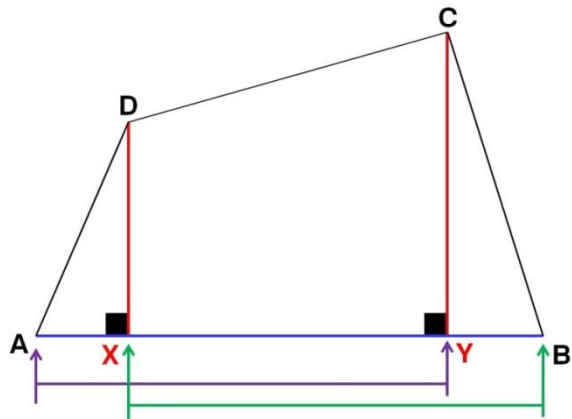


รูปที่ 3.1.9 รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่รู้ระยะคู่ขนานและมุมสองมุมที่ปลายของด้านคู่ขนานนั้น

$$\text{พื้นที่ } \square ABCDA = \frac{b^2 - a^2}{2(\cot \alpha + \cot \delta)} \dots\dots\dots (3.1.10)$$

3.1.3.2 กรณีที่ทราบระยะเส้นฐาน และทราบระยะฉากที่ลากจากมุม 2 มุมที่อยู่ตรง

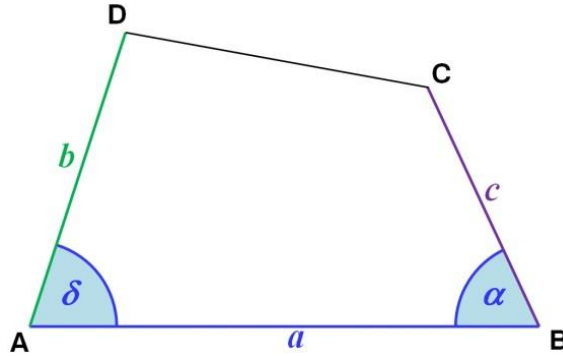
ข้ามกับเส้นฐาน มาตั้งฉากกับฐาน



รูปที่ 3.1.10 แสดงสี่เหลี่ยมใด ๆ กรณีที่รู้ระยะเส้นฐาน และระยะฉาก ทั้งสองด้าน

$$\text{พื้นที่ } \square ABCDA = \frac{1}{2} \{ (DX \times AY) + (CY \times BX) \} \dots (3.1.11)$$

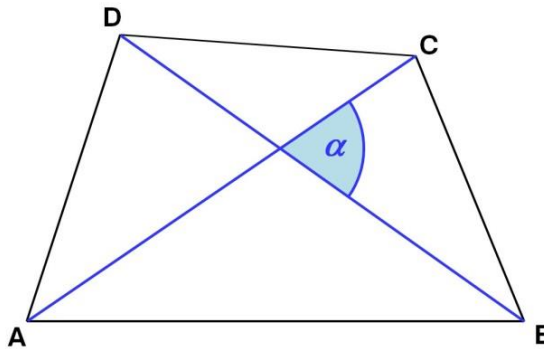
3.1.3.3 เมื่อด้านไม่เท่ากัน ทราบด้านฐานและอีกสองด้านจากปลายของด้านฐาน และทราบค่ามุมที่ปลายด้านฐานทั้งสองด้วย



รูปที่ 3.1.11 รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ กรณีที่รู้ด้านฐาน ด้านประกอบมุม และมุมราบที่ฐานทั้งสอง

$$\text{พื้นที่ } \square ABCDA = \frac{1}{2} [(ab \cdot \sin \delta) + (bc \cdot \sin \alpha) - \{bc \cdot \sin(\alpha + \delta)\}] \dots\dots (3.1.11)$$

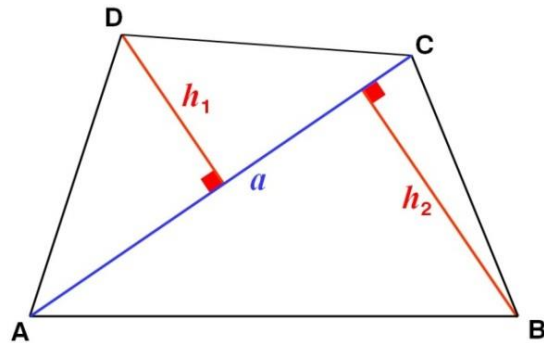
3.1.3.4 เมื่อทราบระยะของเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นและมุมของเส้นทแยงที่ตัดกัน



รูปที่ 3.1.12 รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ กรณีที่รู้เส้นทแยงมุมสองเส้น และมุมของเส้นทแยงที่ตัดกัน

$$\text{พื้นที่ } \square ABCDA = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin \alpha \dots\dots\dots (3.1.12)$$

3.1.3.5 เมื่อทราบด้านทแยงเส้นหนึ่งและระยะฉากจากด้านทแยงไปยังมุมทั้งสอง



รูปที่ 3.1.13 แสดงสี่เหลี่ยมใด ๆ กรณีที่รู้เส้นทแยงมุมและระยะฉากไปยังมุมทั้งสอง

$$\text{พื้นที่ } \square ABCDA = \frac{1}{2} \times a \times (h_1 + h_2) \dots\dots\dots (3.1.13)$$

