## 2.8 การแก้ปัญหาสามเหลี่ยมด้วยกฎของแทนเจนต์

นอกจากการใช้กฎของไซน์หรือ กฎของโคไซน์ ช่วยแก้ปัญหาของรูปสามเหลี่ยมแล้วนั้น ยังมีการแก้ปัญหาอีกลักษณะหนึ่งคือ การใช้กฎของแทนเจนต์ ซึ่งเกิดจากการใช้สมการของ ไซน์ คิดสูตรขึ้นมาใช้งาน จากสมการ (2.3.3B) อาจบอกได้ว่า

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}}$$

เอา 1 ลบออกทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{a-b}{b} = \frac{\sin \mathrm{A} - \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{B}} \qquad \text{................ (2.8.1)}$$

หรือเอา 1 บวกทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{B}} \qquad \text{................ (2.8.2)}$$

หารสมการ (2.8.1) ด้วย (2.8.2) จะได้

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin \mathrm{A} - \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B}} \qquad \text{................ (2.8.3)}$$

จากเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติพื้นราบ เรารู้ว่า

$$\sin A - \sin B = 2\left\{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\right\}$$
$$\sin A + \sin B = 2\left\{\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\right\}$$

ดังนั้นสมการ (2.8.3) จึงเป็น

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2\left\{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\right\}}{2\left\{\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\right\}}$$

นั่นก็คือ

$$\frac{a-b}{a+b} = \cot\tfrac{1}{2}(A+B)\tan\tfrac{1}{2}(A-B)$$

หรือ

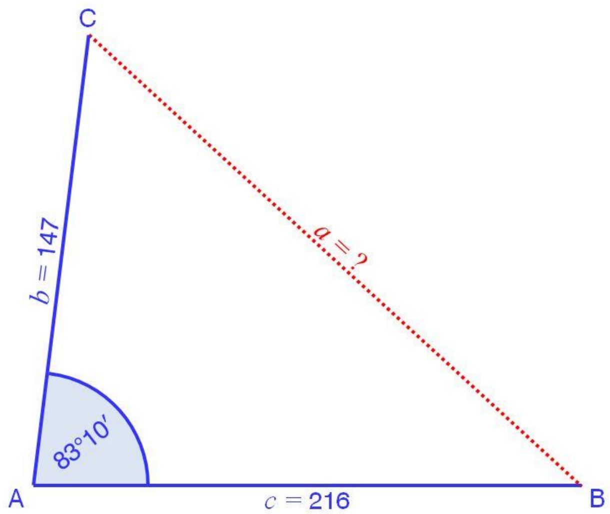
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\tan\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})} \qquad \text{................ (2.8.4)}$$

ซึ่งก็คือ กฎของแทนเจนต์ นั่นเอง ซึ่งหมายถึง อัตราส่วนระหว่างความต่างของด้านประกอบมุมกับผลรวมของด้านประกอบมุม จะเท่ากับ อัตราส่วนของค่าแทนเจนต์ครึ่งหนึ่งของผลต่างของมุมที่อยู่ตรงข้ามด้าน กับค่าแทนเจนต์ครึ่งหนึ่งของผลรวมของมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านคู่นั้น

**ตัวอย่างที่ 2.8.1** ให้ $b$ = 147 ไมล์, $c$ = 216 ไมล์, A = 83°10′ จงหาส่วนที่เหลือ

**วิธีทำ**

ขั้นที่ 1 สร้างรูปประกอบการคำนวณ




ขั้นที่ 2 จากรูปเราอาจแก้ปัญหาจากกฎของโคไซน์ได้ แต่ขณะนี้เราจะทดลองใช้สมการ (2.8.4) หาผลลัพธ์ เมื่อโจทย์กำหนด A, $b$ และ $c$ มาให้ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A + B + C &= 180^\circ \\ \tfrac{1}{2}(B+C) &= \tfrac{1}{2}(180^\circ - A) \\ &= \tfrac{1}{2}(180^\circ - 83^\circ 10') \\ \therefore\ \tfrac{1}{2}(B+C) &= \underline{\underline{48^\circ 25'}} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 3 เพื่อประกอบการใช้สมการของแทนเจนต์ จำเป็นต้องทราบขนาดของสมการทางซ้ายมือด้านบน และด้านล่าง กล่าวคือ

เทอมของ $a-b$ จะใช้ค่าของ $b-c$ = 69

เทอมของ $a+b$ จะใช้ค่าของ $b+c$ = 363

แล้วนำค่าที่ได้มาแทนลงในสมการ ซึ่งจะได้ดังนี้

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}$$

แทนค่า

$$\frac{69}{363} = \frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan(48^\circ 25')}$$

ดังนั้น

$$\tan\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{69\times\tan(48°25')}{363}$$
$$= 0.214220714$$
$$\therefore\ \tfrac{1}{2}(B-C) = \tan^{-1}(0.214220714)$$
$$= \underline{\underline{12.09119631°}}$$

ขั้นที่ 4 คำนวณหามุม B และ C ดังนี้

เมื่อ

$$\tfrac{1}{2}(B-C) = 12.09119631°$$
$$\therefore\ B-C = \underline{\underline{24.18239262°}} \quad \text{........................ (A)}$$

และ

$$\tfrac{1}{2}(B+C) = 48.41666667°$$
$$\therefore\ B+C = \underline{\underline{96.83333333°}} \quad \text{........................ (B)}$$

เอาสมการ (A) + (B) จะได้

$$(B-C)+(B+C) = 24.18239262° + 96.83333333°$$
$$B-C+B+C = 121.01572595°$$
$$2B = 121.01572595°$$
$$\therefore\ B = 60.50786298° \rightarrow \underline{\underline{60°30'28.31''}}$$

ในสมการ (B) หามุม C ได้ดังนี้

เมื่อ

$$B+C = 98.83333333°$$
$$\therefore\ C = 98.83333333° - B$$

แทนค่า B

$$\therefore\ C = 98.83333333° - 61.50786298°$$
$$= 36.32547036° \rightarrow \underline{\underline{36°19'31.69''}}$$

ตรวจสอบโดยหาผลรวมมุมราบภายในรูปสามเหลี่ยม

$$\left.\begin{aligned} A &= 83°10'00.00'' \\ B &= 60°30'28.31'' \\ C &= \underline{36°19'31.69''} \end{aligned}\right\} +$$

$$\therefore\ \text{ผลรวม} = \underline{\underline{180°00'00.00''}} \quad \text{.................. (ถูกต้อง)}$$

ขั้นที่ 5 คำนวณหาด้าน $a$ หรือ BC ด้วยกฎของไซน์ ดังนี้

จากสมการ (2.3.3A) จะได้ว่า

$$a = \frac{b \times \sin \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}}$$

แทนค่า

$$a = \frac{147 \times \sin(83°10')}{\sin(36°19'31.69'')}$$

$$= 246.3923506$$

$$\therefore \mathrm{BC} = \underline{\underline{246.392}}$$

ขั้นที่ 6 ตรวจสอบโดยใช้ Mollweide's Equation ด้วยสมการของผลรวม ดังนี้

จากสมการ (2.3.6) จะได้ว่า

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left\{\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\right\}}{\sin\frac{\mathrm{C}}{2}}$$

แทนค่า

$$\frac{246.3923506+147}{216} = \frac{\cos\left(\frac{83°10' - 36°19'31.69''}{2}\right)}{\sin\frac{60°30'28.31''}{2}}$$

$$1.821260882 = 1.821260882$$ ................. (ถูกต้อง)

<u>ตอบ</u>

<u>ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม</u> การใช้กฎของแทนเจนต์แก้ปัญหาสามเหลี่ยมนี้ ไม่ค่อยนิยมใช้กันมากนัก เนื่องจากมีการคำนวณที่ยุ่งยาก และยาวพอสมควร ที่สำคัญรูปสามเหลี่ยม ต้องไม่มีมุมป้าน หรือมุมฉากในรูป เพราะ ขนาดของมุมที่ใช้กับแทนเจนต์ ต้องไม่เกิน 90° ซึ่งรวมถึงค่าของ $\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ หรือ $\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})$ หรือ $\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{C})$ หรือครึ่งหนึ่งของผลรวมมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมต้องใหญ่ไม่เกินกว่า 90° ด้วย

## 2.9 สรุปสูตรตรีโกณมิติพื้นฐานทั่วไปที่นิยมใช้ในงานสำรวจ

### 2.9.1 ตรีโกณมิติพื้นราบ (Plane Trigonometry)[2]

| ฟังก์ชั่น | sin | Cos | tan | csc* | sec | cot |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 90° – A | cos A | sin A | cot A | sec A | csc A | tan A |
| 90° + A | cos A | – sin A | cot A | sec A | – csc A | – tan A |
| 180° – A | sin A | – cos A | – tan A | csc A | – sec A | – cot A |
| 180° + A | sin A | – cos A | tan A | – csc A | – sec A | cot A |
| 270° – A | – cos A | – sin A | cot A | – sec A | – csc A | tan A |
| 270° + A | – cos A | sin A | – cot A | – sec A | csc A | – tan A |
| 360° – A | – sin A | cos A | – tan A | – csc A | sec A | – cot A |
| A – 360° | sin A | cos A | tan A | csc A | sec A | cot A |

*csc = Cosec

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$$

$$\sin^2 A = (\sin A)^2$$

### 2.9.2 ฟังก์ชั่นความสัมพันธ์ของมุมสองมุม

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

### 2.9.3 เอกลักษณ์ของมุม 2A

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

[2] ที่มา : ยรรยง ทรัพย์สุขอำนวย. การสำรวจชั้นสูง, 2534 (หน้า 579–581)

2.9.4 เอกลักษณ์ของครึ่งหนึ่งของมุม

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

หรือ $$\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

หรือ $$\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

หรือ $$= \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

หรือ $$= \frac{\sin A}{1+\cos A}$$

2.9.5 เอกลักษณ์ของการรวมมุม

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A \pm B)\cos\tfrac{1}{2}(A \mp B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\tan A \pm \tan B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}$$

$$\sin^2 A - \sin^2 B = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

2.9.6 กฎของไซน์ (Sine's Law)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

2.9.7 กฎของโคไซน์ (Cosine's Law)

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - (2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A)}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

2.9.8 กฎของแทนเจนต์ (Tangent's Law)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

2.9.9 สมการตรวจสอบของ Mollweide's Equation

การตรวจสอบด้วยผลรวม

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{C})}$$

การตรวจสอบด้วยผลต่าง

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{C})}$$