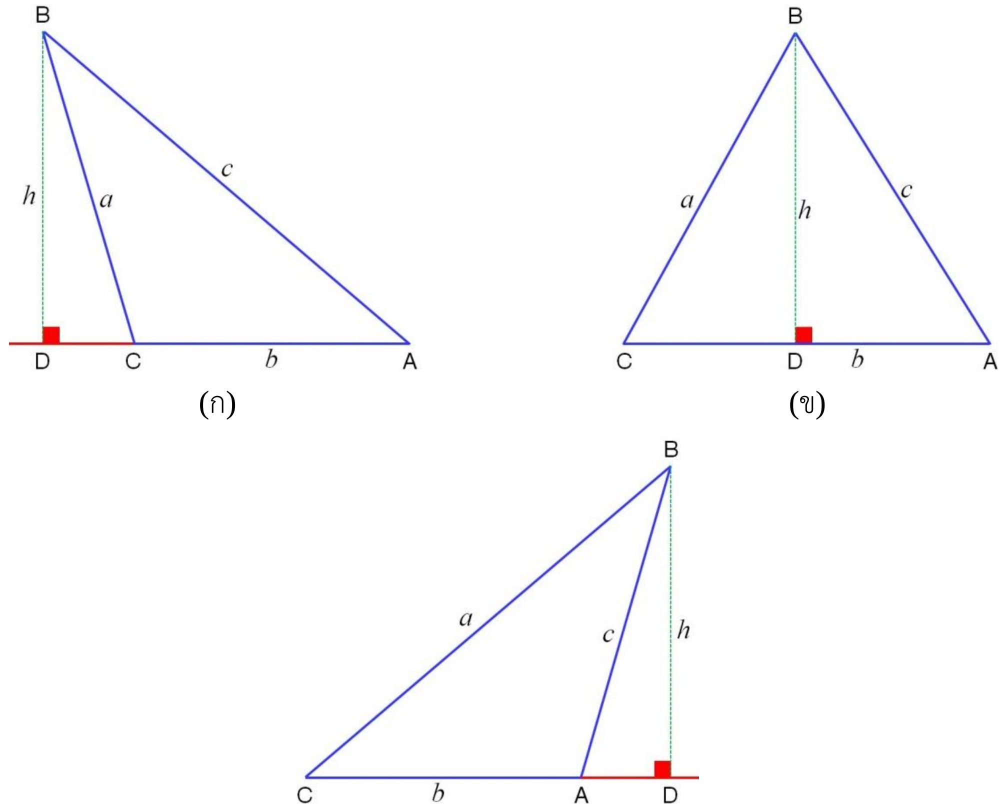
2.6 การนำกฎของโคไซน์มาประยุกต์ใช้ในงานสำรวจ

การแก้ปัญหาด้วย กฎของไซน์ บางครั้งอาจไม่ได้ผล เพราะอาจเกิดกรณีรูปสามเหลี่ยมซ้อน 2 รูป หรือกรณีกำกวมดังที่เคยกล่าวมาแล้ว เราอาจหันมาใช้ กฎของโคไซน์ ดูบ้าง เพื่อช่วยแก้ปัญหาสามเหลี่ยมอีกทางหนึ่ง ลองพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้



รูปที่ 2.6.1 แสดงลักษณะของรูปสามเหลี่ยมในหลาย ๆ กรณี

จากรูป

ให้ D เป็นจุดที่ส่วนสูง (h) ตั้งฉากกับฐานของสามเหลี่ยม ซึ่งสามารถเอาทฤษฎีของพีทากอรัส เข้ามาช่วยดังนี้

พิจารณารูป (ก)

$$c^2 = h^2 + \mathrm{DA}^2 \qquad \text{.........................} (2.6.1)$$

แต่

$$h = a \cdot \sin \mathrm{C}$$

$$\therefore \mathrm{DA} = b + \mathrm{DC}$$

ขณะที่รูปที่ 2.6.1(ก) และ (ข) ไม่สามารถวัดจุด D ได้เนื่องจากเป็นจุดที่อยู่นอกรูป

ในขณะเดียวกัน อาจใช้ DA = $b - \mathrm{DC}$ ในรูปที่ 2.6.1(ข)

$$\therefore \mathrm{DA} = b - (a \cdot \cos \mathrm{C})$$

และเมื่อ $\cos \mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{DA}}{a}$ แทนค่า h และ DA ลงในค่าของ c จะได้

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \cdot \sin \mathrm{C})^2 + \{b - (a \cdot \cos \mathrm{C})\}^2 \\ &= a^2 \sin^2 \mathrm{C} + b^2 - 2ab \cdot \cos \mathrm{C} + a^2 \cos^2 \mathrm{C} \\ &= a^2 (\sin^2 \mathrm{C} + \cos^2 \mathrm{C}) + b^2 - 2ab \cdot \cos \mathrm{C} \end{aligned}$$

จากเอกลักษณ์ $\sin^2 \mathrm{A} + \cos^2 \mathrm{A} = 1$ สมการข้างบนจะได้เป็น

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \mathrm{C} \qquad \text{............ (2.6.2)}$$

จากสมการ (2.6.2) อาจกล่าวโดยสรุปได้ว่า ด้านใด ๆ ของสามเหลี่ยมกำลังสองจะเท่ากับ<u>ผลรวม</u>ของด้านที่เหลือกำลังสองอีกสองด้าน <u>ลบ</u>ด้วยสองเท่าของ<u>ผลคูณ</u>ของด้านที่เหลือทั้งสองกับค่าโคไซน์ ของมุมในระหว่างด้านทั้งสองหรือมุมตรงข้ามกับด้านที่ต้องการหา

ในขณะเดียวกัน สมการ (2.6.2) สามารถคำนวณหามุมได้เช่นกัน เมื่อทราบด้านทั้งสาม และเราสามารถเขียนสมการได้ใหม่ โดยการจัดรูปใหม่และจะได้ดังนี้

$$\cos \mathrm{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad \text{.................... (2.6.3)}$$

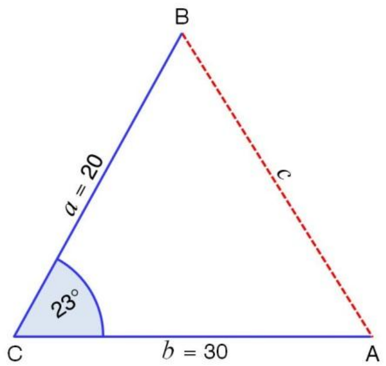
นั่นก็คือ ค่าโคไซน์ของมุมใด ๆ ของสามเหลี่ยม จะเท่ากับผลรวมของด้านประกอบมุมกำลังสองรวมกัน ลบด้วยด้านตรงข้ามมุมนั้นกำลังสอง แล้วหารด้วยสองเท่าของด้านประกอบมุมนั้น

<u>ข้อเสนอแนะ</u> การนำสมการ (2.6.2) และสมการ (2.6.3) ไปใช้งานนั้น ผู้ใช้ไม่ควรยึดติดกับตัวอักษร แต่ต้องจัดองค์ประกอบของรูปให้สอดคล้องกับสมการเสมอ เนื่องจากการคำนวณบางครั้งอาจจะไม่ใช้ตัวอักษรตามทฤษฎี หรือเอกลักษณ์ หรือไม่ก็ต้องการในส่วนที่ไม่ตรงตามสมการ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2.6.1 กำหนดให้ a = 20′, b = 30′, C = 23° จงหาส่วนที่เหลือ

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 สร้างรูปประกอบการคำนวณ



ขั้นที่ 2 จากสมการ (2.6.2)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

เมื่อ

$$a = 20'$$
$$b = 30'$$
$$C = 23°$$

แทนค่า

$$c^2 = 20^2 + 30^2 - \{2(20)(30)\cos 23°\}$$
$$= 195.3941759$$
$$c = \sqrt{195.3941759} = 13.97834668'$$
$$\therefore c = \underline{\underline{13.978'}}$$

การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

การกดแป้น	ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ
AC 2 0 x^2 + 3 0 x^2 − [(--- 2 × 2 0 × 3 0 × cos 2 3 ---)] =	20²+30²−(2×2 195.3941759
√ =	√Ans 13.97834668
Ans SHIFT RCL (−)	Ans→A 13.97834668

ขั้นที่ 3 หามุม A และ B จากสมการ (2.6.3)

1) หามุม A

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

เมื่อ

$$a = 20'$$
$$b = 30'$$
$$c = 13.97834668'$$

แทนค่า

$$\cos A = \frac{30^2 + 13.97834668^2 - 20^2}{2(30)(13.97834668)}$$

$$= 0.8291326$$

$$A = \cos^{-1}(0.8291326) = 33.99026207°$$

$$\therefore A = \underline{\underline{33°59'24.94''}}$$

2) หามุม B

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

แทนค่า

$$\cos B = \frac{20^2 + 13.97834668^2 - 30^2}{2(20)(13.97834668)}$$

$$= -0.544781566$$

$$B = \cos^{-1}(-0.544781566) = 123.00979379°$$

$$\therefore B = \underline{\underline{123°00'35.06''}}$$

การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

การกดแป้น	ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ
AC [(--- 3 0 x^2 + RCL (–) x^2 – 2 0 x^2 ---)] ÷ [(--- 2 × 3 0 × RCL (–) ---)] =	(30²+A²–20²) 0.8291326
SHIFT cos =	cos⁻¹ Ans 33.99026207
°'"	cos⁻¹ Ans 33°59°24.94
AC [(--- 2 0 x^2 + RCL (–) x^2 – 3 0 x^2 ---)] ÷ [(--- 2 × 2 0 × RCL (–) ---)] =	(20²+A²–30²) -0.544781566
SHIFT cos = °'"	cos⁻¹ Ans 123°0°35.06

ขั้นที่ 4 การตรวจสอบ สามารถตรวจสอบจากคุณสมบัติทั่วไปของสามเหลี่ยม คือ การหาผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม โดยมุมภายในของสามเหลี่ยมทุกรูปต้องรวมกันได้ 180° พอดี ดังนั้นในรูป ΔABC ผลรวมมุมราบภายในคือ

$$\Sigma = A + B + C$$

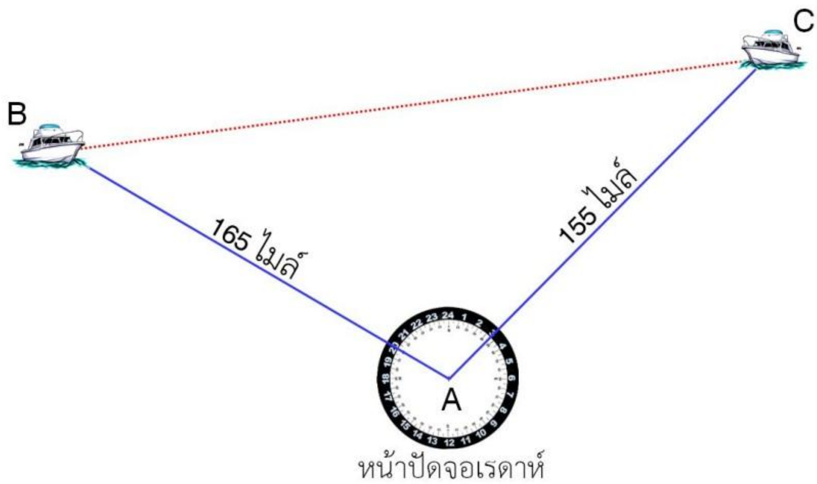
$$= 33°59'24.94'' + 123°00'35.06'' + 23°$$

$$= \underline{\underline{180°00'00''}}$$ .... (ถูกต้อง) <u>ตอบ</u>

ตัวอย่างที่ 2.6.2 เรือสองลำมีเครื่องรับ–ส่งวิทยุสำหรับสื่อสาร ที่มีขีดความสามารถของสัญญาณในการรับ–ส่งถึง 200 ไมล์ ในสภาพอากาศทั่วไป และจากการเฝ้ามองตำแหน่งของเรือต่าง ๆบนจอเรดาห์ พบว่า เรือลำแรกอยู่ที่ 20 นาฬิกา ระยะ 165 ไมล์ จากสถานีชายฝั่ง และเรือลำที่สองอยู่ที่ 3 นาฬิกา ระยะ 155 ไมล์ อยากทราบว่าเรือทั้งสองสามารถติดต่อกันเองได้หรือไม่

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 สร้างรูปประกอบการคำนวณ



ขั้นที่ 2 พิจารณาใน ΔABC

จากการเทียบมุมกับเวลา 1 ชม. = 15° ดังนั้น ใน ΔABC จะพบว่า

$$\mathrm{A} = \{(24^h - 20^h) + 3^h\} \times 15^\circ$$
$$= 105^\circ$$
$$\mathrm{AB} = 165 \text{ ไมล์ (ให้เป็นความยาวของ } c\text{)}$$
$$\mathrm{AC} = 155 \text{ ไมล์ (ให้เป็นความยาวของ } b\text{)}$$

จากสมการ (2.6.2)

$$a^2 = \mathrm{BC}^2 = b^2 + c^2 - \{2bc\cos \mathrm{A}\}$$

แทนค่า

$$\mathrm{BC}^2 = 155^2 + 165^2 - \{2(155)(165)\cos 105^\circ\}$$
$$= 64488.59416$$
$$\mathrm{BC} = \sqrt{64488.59416} = 253.9460458$$
$$\therefore \mathrm{BC} = \underline{253.946} \text{ ไมล์}$$

นั่นคือ ระยะทางระหว่างเรือทั้ง 2 ลำ = <u>253.946</u> ไมล์

การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

การกดแป้น	ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ
AC √ [(--- 1 6 5 x^2 + 1 5 5 x^2 − [(--- 2 × 1 6 5 × 1 6 5 × cos 1 0 5 ---)] ---)] =	√(165²+155²− 253.9460458

ขั้นที่ 3 จากคำตอบในข้อ 2 สรุปได้ว่า เรือทั้งสองไม่สามารถติดต่อกันได้โดยตรง เนื่องจากขีดความสามารถของเครื่องรับ–ส่งวิทยุ มีรัศมีสั้นกว่าระยะทางตรง จึงต้องติดต่อผ่านสถานีชายฝั่งก่อน จึงจะสามารถติดต่อเรืออีกลำหนึ่งได้

ตอบ

2.7 บทสรุปการประยุกต์ด้วยกฎของโคไซน์

การประยุกต์ด้วยกฎของโคไซน์นี้ อาจกล่าวโดยสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาด้วยกฎของไซน์ หรือกฎของโคไซน์ สำหรับสามเหลี่ยมแล้ว จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องพิจารณารูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นเป็นสำคัญเสมอ การคำนวณหาส่วนใดส่วนหนึ่งของสามเหลี่ยมไม่จำเป็นต้องใช้เพียงกฎเดียว อาจใช้ผสมผสานกันได้ แต่มีข้อควรจำคือ <u>ทุกครั้งที่คำนวณ</u> ต้องตรวจสอบผลการคำนวณเสมอ และต้องใช้วิธีการตรวจสอบคนละแนวทาง เป็นต้นว่า เมื่อใช้กฎของไซน์คำนวณก็ต้องใช้กฎของโคไซน์ ตรวจสอบ หรือใช้กฎของโคไซน์คำนวณก็ใช้กฎของไซน์ตรวจสอบ หรือใช้ทั้งกฎของไซน์ และกฎของโคไซน์ก็ต้องใช้ Mollweide's Equation ตรวจสอบเป็นต้น

และนอกจากนี้ในทางปฏิบัติแล้ว กฎของไซน์นิยมใช้คำนวณหาความยาวของด้าน ส่วนกฎของโคไซน์ นิยมใช้คำนวณหาขนาดของมุมมากกว่า แต่ทว่าการใช้กฎของไซน์ ขนาดของมุมที่ใช้คำนวณต้องใหญ่ไม่เกิน $90°$ เพราะหากใหญ่กว่านี้ จะเกินกรณีกำกวมทันที เพราะจากเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติพื้นราบที่ว่า

$$\sin(180° - A) = \sin A$$