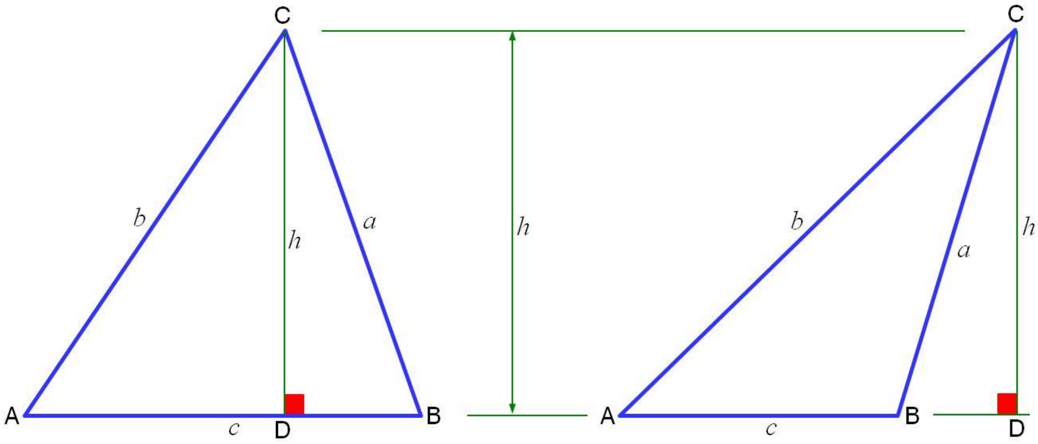
2.3 การนำกฎของไซน์มาประยุกต์ใช้ในงานสำรวจ

กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ โดยมีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.3.1



(ก) (ข)

รูปที่ 2.3.1 แสดงส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

จากรูปที่ 2.3.1 จะเห็นได้ว่า สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป มีความสูงเท่ากับ h หรือระยะฉากจากจุดยอดมายังด้านฐานของรูปที่จุด D ซึ่งเราสามารถหาความสูงได้จากหลักการของสามเหลี่ยมมุมฉาก และหากเราสมมุติว่า ทราบความยาวของ a และขนาดของมุม B จะได้ว่า

$$\sin \mathrm{B} = \frac{h}{a} \quad \text{ดังนั้น} \quad h = a \cdot \sin \mathrm{B} \qquad \text{.................. (2.3.1)}$$

หรือหากเราทราบมุม A และด้าน b จะได้

$$\sin \mathrm{A} = \frac{h}{b} \quad \text{ดังนั้น} \quad h = b \cdot \sin \mathrm{A} \qquad \text{.................. (2.3.2)}$$

สมการ (2.3.1) และสมการ (2.3.2) จะให้ขนาดของ h เท่ากัน ดังนั้นสมการทั้งสองเท่ากันด้วยนั่นคือ

$$a \cdot \sin \mathrm{B} = b \cdot \sin \mathrm{A}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}}$$

ในทำนองเดียวกันนี้ อาจหาได้ว่า

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}} \qquad \text{...................... (2.3.3)}$$

2.4 การตรวจสอบผลการคำนวณ

สมการ (2.3.3) นี้ ใช้แก้ปัญหาในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ได้สะดวก แต่จะแน่ใจได้อย่างไรว่า ผลลัพธ์ที่หาได้นี้ มีความถูกต้องเพียงพอ ในการคำนวณส่วนสุดท้ายจึงต้องมีการตรวจสอบผลลัพธ์ โดยใช้ Mollweide's Equations[1] เป็นสมการที่นิยมใช้ตรวจสอบผลลัพธ์ ภายหลังการคำนวณ ซึ่งเป็นการตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของระยะ และมุม โดยมีรายละเอียดต่าง ๆ จะขออธิบายให้เข้าใจพอสังเขปดังนี้

และจากสมการ (2.3.3) มักนิยมเอามาใช้เพียง 1 คู่เท่านั้น คือ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \qquad \text{.......................} \ (2.3.3A)$$

จัดเทอมใหม่ โดยการคูณไขว้ จะได้ว่า

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \qquad \text{.......................} \ (2.3.3B)$$

เอา 1 ลบออกทั้งสองข้าง

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{\sin A}{\sin B} - 1$$

จะได้

$$\frac{a-b}{b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin B}$$

ดังนั้น

$$\frac{a-b}{\sin A - \sin B} = \frac{b}{\sin B}$$

และ จากสมการ (2.3.3) จะได้สมการ

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a-b}{\sin A - \sin B}$$

นำสมการข้างต้นนี้ ทำการจัดเทอมใหม่ ซึ่งก็จะได้ดังนี้

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C} \qquad \text{..................} \ (2.3.4)$$

ในสมการ (2.3.4) หากพิจารณาสมการทางขวามือ จะเป็นการรวมทางตรีโกณ และเป็นเอกลักษณ์ของการรวมสมการได้ดังนี้

---

[1] ที่มา : Fred W.Sparks and Pual K.Rees. *Plane Trigonometry with Tables*, Fifth Edition. 1965. (หน้า 213–214)

$$\sin A - \sin B \quad = \quad 2\cos\left\{\frac{A+B}{2}\right\}\sin\left\{\frac{A-B}{2}\right\}$$

แทนเอกลักษณ์ลงในสมการ (2.3.4) ทางขวามือและกระจายสมการออก จะได้ดังนี้

$$\frac{a-b}{c} \quad = \quad \frac{\cos\left\{\frac{A+B}{2}\right\} - \sin\left\{\frac{A-B}{2}\right\}}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}$$

เมื่อ $\frac{C}{2}$ และ $\frac{A+B}{2}$ ต่างก็เป็นมุมประกอบรวมหนึ่งมุมฉากทั้งในเทอมของ ไซน์ และ โคไซน์ ในภาคเดียวกัน ดังนั้น

$$\frac{a-b}{c} \quad = \quad \frac{\sin\left\{\frac{A-B}{2}\right\}}{\cos\frac{C}{2}} \qquad \text{..................} \ (2.3.5)$$

หรือ

$$\frac{a+b}{c} \quad = \quad \frac{\cos\left\{\frac{A-B}{2}\right\}}{\sin\frac{C}{2}} \qquad \text{..................} \ (2.3.6)$$

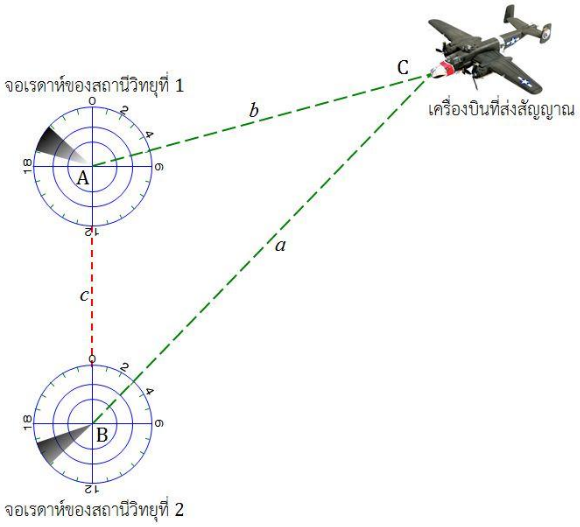
สมการทั้งสองที่ได้นี้ เป็นสมการใช้สำหรับตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณแก้ปัญหาสามเหลี่ยมในรูปที่ดีที่สุด เนื่องจากทางซ้ายมือจะเป็นอัตราส่วนของด้านทั้งสามด้าน และทางขวามือจะเป็นอัตราส่วนทางมุมทั้งสามที่สัมพันธ์กับด้านของรูปสามเหลี่ยมด้วย

ตัวอย่างที่ 2.4.1 สถานีวิทยุแห่งหนึ่งได้รับสัญญาณขอความช่วยเหลือจากเครื่องบินลำหนึ่ง เมื่อตรวจสอบที่จอเรดาห์ พบว่า เครื่องบินลำดังกล่าวอยู่ที่ 5 นาฬิกาของตำแหน่งบนจอเรดาห์ ในขณะเดียวกัน สถานีวิทยุอีกหนึ่ง ซึ่งอยู่ห่างจากสถานีแรก 100 ไมล์ ที่ตำแหน่ง 12 นาฬิกาของสถานีวิทยุแห่งแรก พบว่า เครื่องบินลำเดียวกันนี้อยู่ที่ 3 นาฬิกาของตำแหน่งบนจอเรดาห์ของสถานีวิทยุแห่งนี้ อยากทราบว่าเครื่องบินลำนี้อยู่ห่างจากสถานีแรกเป็นระยะทางเท่าใด ?

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 สร้างรูปประกอบการคำนวณ

การสร้างรูปเพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น เรากำหนดให้หน้าจอเรดาห์ของสถานีวิทยุทั้งสองแห่ง มีลักษณะเดียวกันกับจานองศาชนิดกลม โดย 1 รอบจานองศามีค่าเท่ากับ 360° หรือ 24 ชั่วโมง หรือ 1 ชั่วโมงเท่ากับ 15°



ขั้นที่ 2 หาระยะทางจากเครื่องบินถึงสถานีวิทยุที่ 1 ดังนี้

จากสมการ (2.3.3) ใช้ 2 เทอมหลัง

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ดังนั้น

$$b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}$$

เมื่อ c = ระยะทาง AB = 100 ไมล์

B = มุมราบที่เทียบจากนาฬิกา = 3 × 15 = 45°

C = 180° – A – B, เมื่อ มุมที่ A = 15 × 7 = 105°

= 180° – 105° – 45° = 30°

แทนค่า

$$b = \frac{100 \times \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 141.4213562$$

∴ เครื่องบินอยู่ห่างจากสถานีวิทยุที่ 1 เป็นระยะทาง = 141.421 ไมล์

<u>ตอบ</u>

การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

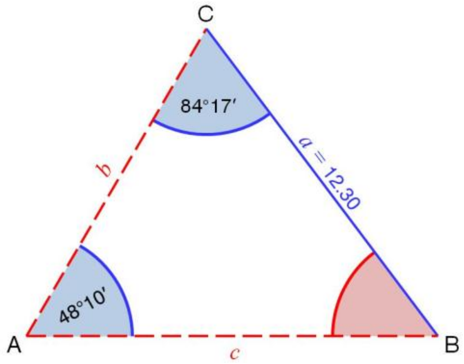
การกดแป้น	ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ
1 0 0 sin 4 5 ÷ sin 3 0 =	100sin 45÷si 141.4213562

ก่อนใช้คำนวณทุกครั้ง ต้องแน่ใจก่อนว่า คำนวณอยู่ในภาวะปกติ หรือ Degree Mode หรือ deg หรือ DEG หรือ D เสมอ (ตัวอักษรที่ปรากฏบนหน้าจอจะขึ้นอยู่กับชนิดของเครื่องคำนวณ ให้สังเกตที่จอภาพบนเครื่องคำนวณที่ใช้ด้วย)

ตัวอย่างที่ 2.4.2 ให้ a = 12.30 ม., A = 48°10′ และ C = 84°17′ จงหาส่วนที่เหลือ

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 สร้างรูปประกอบการคำนวณ



ขั้นที่ 2 จากสมการ (2.3.3) จะได้ว่า

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

ดังนั้น

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$$

เมื่อ c = ระยะทาง AB

C = 84°17′

A = 48°10′

แทนค่า

$$c = \frac{12.3 \times \sin 84°17'}{\sin 48°10'} = 16.42601408$$

$$\therefore c = \underline{\underline{16.426}} \text{ ม.}$$

การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

การกดแป้น	ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ
AC 1 2 · 3 sin 8 4 °’” 1 7 °’” ÷ sin 4 8 °’” 1 0 °’” =	12.3sin 84°1 16.42601408
SHIFT RCL (–) (เก็บค่าไว้ในตัวแปร A ในเครื่องคำนวณ)	12.3sin 84°1 16.42601408

และทราบว่า

$$B = 180° - A - C$$

$$= 180° - 84°17' - 48°10'$$

$$\therefore B = \underline{\underline{47°33'}}$$

ในทำนองเดียวกับข้างต้น เราอาจเขียนได้ว่า

$$b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}$$

เมื่อ c = ระยะทาง AB

C = 84°17′

B = 47°33′

แทนค่า

$$b = \frac{16.42601408 \times \sin(47°33')}{\sin(84°17')}$$

$$= 12.18078696$$

$$\therefore b = \underline{\underline{12.181}} \text{ ม.}$$

การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

การกดแป้น	ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ
1 8 0 – 8 4 °’” 1 7 °’” – 4 8 °’” 1 0 °’” = °’”	180–84°17°–4 47°33°0.
sin Ans × ALPHA (–) ÷ sin 8 4 °’” 1 7 °’” = SHIFT RCL °’”	sin Ans×A÷si 12.18078696

* ยังไม่ต้องกด AC ให้เครื่องทำงานต่อเนื่องไปเลย

ขั้นที่ 3 ตรวจสอบผลการคำนวณจากสมการ (2.3.5) ดังนี้

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left\{\dfrac{A-B}{2}\right\}}{\cos\dfrac{C}{2}}$$

แทนค่าส่วนต่าง ๆ

$$\frac{12.3-12.18078696}{16.42601408} = \frac{\sin\left(\dfrac{48°10'-47°32'}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{84°17'}{2}\right)}$$

$$7.257575557\text{E}–03 = 7.257575547\text{E}–03$$

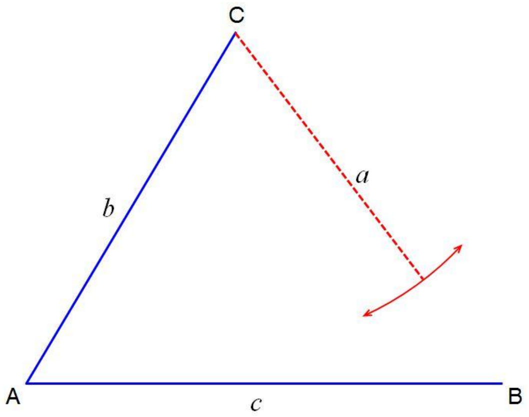
$\therefore$ ผลต่างทางซ้ายมือและขวามือ = $\underline{\underline{1.138\times10^{-10}}}$ (ยอมรับได้ในงานทั่วไป)

การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

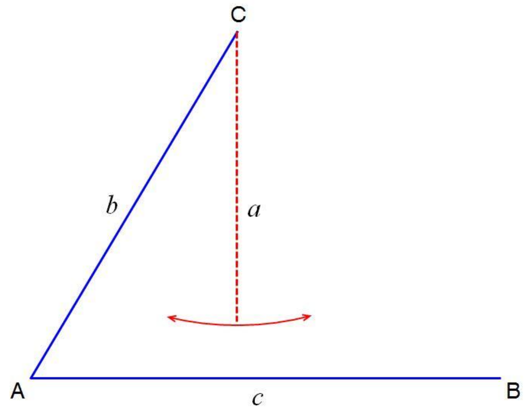
การกดแป้น	ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ
[(--- 1 2 • 3 − Ans ---)] ÷ ALPHA (−) = SHIFT RCL hyp	(12.3−B)÷A÷C 7.257575557 ×10^-03
sin [(--- [(--- 4 8 °’’’ 1 0 °’’’ − 4 7 °’’’ 3 3 °’’’ ---)] ÷ 2 ---)] ÷ cos [(--- 8 4 °’’’ 1 7 °’’’ ÷ 2 ---)] =	sin ((48°10° 7.257575556 ×10^-03
− ALPHA hyp =	Ans−C -1.13 ×10^-12

2.5 การพิจารณาในกรณีกำกวม

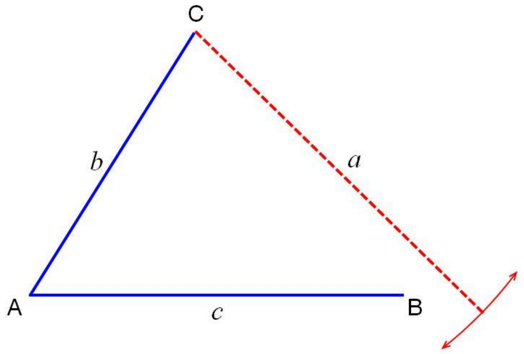
ในการคำนวณบางครั้ง อาจประสบปัญหาเกี่ยวกับโครงสร้างของรูปที่เราพิจารณา หรือสามเหลี่ยมนั้น ๆ โดยผลลัพธ์ที่ได้จะมีความถูกต้องเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น ดังรูปต่อไปนี้



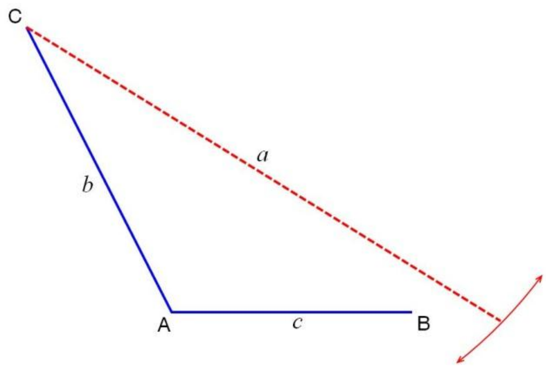
(ก)



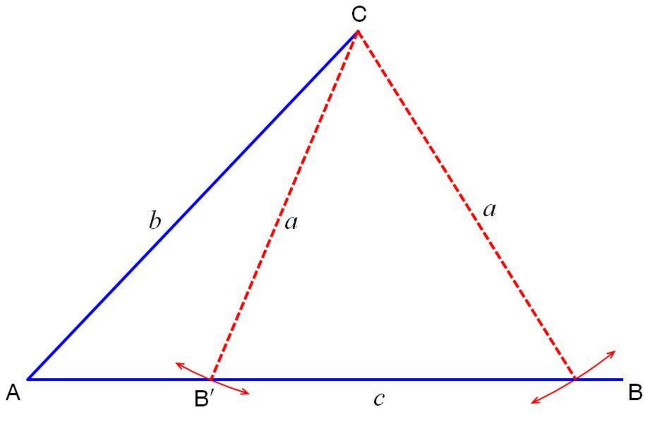
(ข)



(ค)



(ง)



(จ)

รูปที่ 2.5.1 แสดงความเป็นไปได้ของด้าน a ที่เกิดจากการคำนวณ

จากรูปที่ 2.5.1 หากกำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ทราบมุม A ด้าน a และด้าน b โดยหลักการทางตรีโกณมิติพื้นราบ สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ดังนี้

1) สร้างมุม A ที่ปลายแขนของเส้นตรงด้านใดด้านหนึ่ง

2) ลาก AC ตามขนาดความยาวของ b

3) ให้ C เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมีเท่ากับขนาดของ a เขียนส่วนโค้งบนพื้นราบ ซึ่งอาจเกิดในโอกาสของความเป็นไปได้ดังนี้

3.1 รัศมี a สั้นกว่าความยาวของ b ก็จะได้รูปที่ 2.5.1(ก) หากมุมที่ C มีขนาดใหญ่กว่าหรือเท่ากับ $90°$ แล้ว มุม B จะน้อยกว่าหรือเท่ากับ $90°$ ตามลำดับ ดังนั้นหากขนาดของ a ยาวน้อยกว่า b ก็ไม่สามารถสร้างรูปที่ต้องการได้ เพราะส่วนโค้งจะไม่สัมผัส หรือตัดกับระนาบ A เลย

3.2 หากส่วนโค้งมาสัมผัสกับระนาบของ A ที่ B ดังรูปที่ 2.5.1(ข) หรือตัดกับระนาบ A ที่ B ดังรูปที่ 2.5(ค) และรูปที่ 2.5.1(ง) เราจะสามารถคำนวณหาส่วนที่เหลือ ตามสมการตรีโกณมิติพื้นราบได้

3.3 หากรัศมีนั้น สามารถตัดกับระนาบ A ได้ถึงสองจุดด้วยกัน ตามรูปที่ 2.5.1(จ) คือจุด B, B′ ในสามเหลี่ยมสองรูป หากกำหนดด้าน a, b และมุม A แล้วใช้สมการ (2.3.3B) จะได้ว่า

$$\frac{\sin \mathrm{A}}{a} = \frac{\sin \mathrm{B}}{b}$$

ดังนั้น

$$\sin \mathrm{B} = \frac{b \cdot \sin \mathrm{A}}{a} \qquad \text{.......................} \; (2.5.2)$$

ขนาดของ B ที่คำนวณได้นี้ จะมี 2 ขนาด คือ มุม B และมุม B′ โดยที่

$$\mathrm{B}' = 180° - \mathrm{B}$$

ผลของ $\sin \mathrm{B}'$ จะเท่ากับ $\sin \mathrm{B}$ ตามเอกลักษณ์ของมุม และมีโอกาสเป็นไปได้ทั้งสองมุม หากรวมผลรวมของ A+B′ และ A+B มากกว่า $180°$ แล้ว แสดงว่าเป็นค่ามุมที่ใหญ่กว่าความจริง และหากให้สมการ (2.5.2) มีค่าเป็น 1 แล้ว หรือ

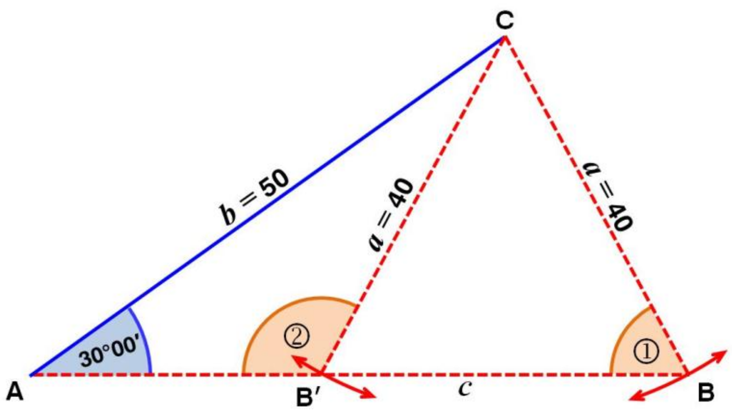
$$\sin \mathrm{B} = \frac{b \cdot \sin \mathrm{A}}{a} = 1$$

เราสามารถบอกได้ทันทีว่า ขนาดของมุม B′ และมุม B เท่ากับ 90° เช่นกัน ซึ่งลักษณะดังกล่าวนี้ เราเรียกว่า ปัญหาสามเหลี่ยมในลักษณะกำกวม (Ambiguous Case) โดยคำตอบที่ได้สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมได้สองรูป แต่มีโอกาส <u>ถูกรูปหนึ่งผิดรูปหนึ่ง</u> หรือ <u>ถูกทั้งสองรูป</u> หรือ <u>ผิดทั้งสองรูป</u> เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2.5.1 ให้ $A = 30°$, BC = a = 40 และ AC = b = 50 จงหาส่วนที่เหลือ

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 สร้างรูปประกอบการคำนวณ



ขั้นที่ 2 คำนวณหา B′ ในรูป ΔACB′

จากสมการ (2.5.2)

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$$

$$= \frac{50 \times \sin 30°}{40} = 0.625$$

$$B' = \sin^{-1}(0.625) = 38.68218745°$$

$$\therefore\ B' = \underline{\underline{38°40'55.87''}}$$

$$= 180° - 38°40'55.87''$$

หรือ $B' = \underline{\underline{141°19'04.13''}}$

จะเห็นได้ว่า ค่ามุมของ B′ มีโอกาสเป็นไปได้ถึง 2 ค่า คือ

ค่ามุมแรก (①) = 38°40′55.87″

ค่ามุมที่สอง (②) = 141°19′04.13″

การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

การกดแป้น	ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ
5 0 sin 3 0 ÷ 4 0 =	50sin 30÷40 0.625
SHIFT sin = °’”	sin⁻¹ Ans 38°40°55.87
1 8 0 − Ans = °’”	180−Ans 141°19°4.13

ขั้นที่ 3 ตรวจสอบคำตอบโดยนำไปรวมกับค่าที่กำหนดให้

1) $A + B$ ใน ΔACB = 68°40′55.87″

ในเมื่อ ΔCBB′เป็น Δหน้าจั่ว ตามคุณสมบัติจะพบว่า $B = B'$

2) $A + B'$ ใน ΔACB′ = 171°19′04.13″

จะเห็นได้ว่า 3.1 และ 3.2 ผลรวมน้อยกว่า 180° หมายถึง คำตอบของ B และ B′ มีความถูกต้องเหมือนกัน

ขั้นที่ 4 คำนวณหามุม C และ c จากสมการ (2.3.3) คือ

จากสมการ (2.3.3)

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$$

พิจารณาในรูป ΔACB จะพบว่า

$$\begin{aligned} C &= 180° - (A+B) \\ &= 180° - (30° + 68°40'55.87'') \\ &= \underline{\underline{111°19'04.13''}} \end{aligned}$$

แทนค่าลงในสมการข้างต้นจะได้

$$\begin{aligned} c &= \frac{(40) \cdot \sin(111°19'04.13'')}{\sin(30°)} \\ &= 74.5262595 \\ \therefore c &= \underline{74.526} \end{aligned}$$

การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

การกดแป้น	ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ
AC 4 0 sin 1 1 1 °’’’ 1 9 °’’’ 4 • 1 3 °’’’ ÷ sin 3 0 =	40sin 111°19 74.52626595

และพิจารณาในรูป $\Delta ACB'$ จะพบว่า

$$C = 180° - (A+B')$$
$$= 180° - (30° + 171°19'04.13'')$$
$$= \underline{8°40'55.87''}$$

แทนค่าลงในสมการข้างต้นจะได้

$$c = \frac{(40)\cdot\sin(8°40'55.87'')}{\sin(30°)}$$
$$= 12.07627834$$
$$\therefore\ c = \underline{12.076}$$

การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

การกดแป้น	ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ
AC 4 0 sin 8 °’’’ 4 0 °’’’ 5 5 • 8 7 °’’’ ÷ sin 3 0 =	40sin 8°40°5 12.07627834

ขั้นที่ 5 สรุปได้ว่า สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป มีขนาดและความเป็นไปได้ทั้ง 2 รูปดังนี้

ΔACB		$\Delta ACB'$	
a =	40	a =	40
b =	50	b =	50
c =	74.526	c =	12.076
$\hat{A}$ =	30°00′00″	$\hat{A}$ =	30°00′00″
$\hat{B}$ =	38°40′55.87″	$\hat{B}$ =	141°19′04.13″
$\hat{C}$ =	111°19′04.13″	$\hat{C}$ =	8°40′55.87″
มุมรวม =	180°00′00.00″	มุมรวม =	180°00′00.00″

<u>ตอบ</u>