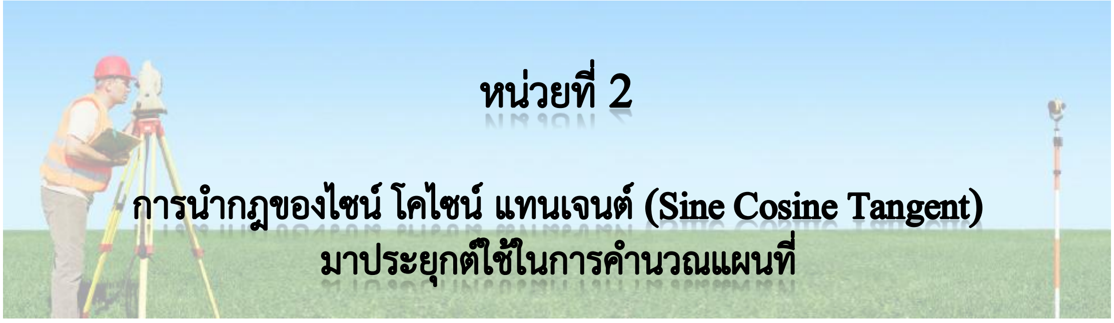


หน่วยที่ 2

การนำกฎของไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ (Sine Cosine Tangent) มาประยุกต์ใช้ในการคำนวณแผนที่

ความเข้าใจในการนำกฎของ ไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ มาประยุกต์ใช้ในการคำนวณแผนที่นี้ เป็นการประยุกต์ความรู้และทฤษฎีบทต่าง ๆ เพื่อการแก้ปัญหา หรือคำนวณหาในสิ่งที่ต้องการ หรือประโยชน์ต่าง ๆ จากการคำนวณ โดยอาศัยรูปเหลี่ยมต่าง ๆ ที่อยู่บนระนาบหรือพื้นราบ

2.1 การประยุกต์ตรีโกณมิติพื้นราบเบื้องต้นมาใช้งานคำนวณแผนที่

การประยุกต์รูปเหลี่ยมต่าง ๆ เข้ามาใช้ในงานสำรวจ ซึ่งส่วนมากนิยมใช้รูปสามเหลี่ยมมากที่สุด เนื่องจากรูปเรขาคณิตของสามเหลี่ยม มีความสะดวกต่อการคำนวณและตรวจสอบได้ง่าย ตลอดจนสามารถสร้างรูปได้ง่ายด้วยหลักการทางเรขาคณิตนั่นเอง ดังนั้นการนำรูปเรขาคณิตของสามเหลี่ยมมาใช้ในงานสำรวจ มักมีจุดประสงค์ 2 ประการคือ ต้องการหาขนาดหรือพื้นที่ของรูปเหลี่ยมนั้น และต้องการแก้ปัญหาหรือคำนวณหาในสิ่งที่ต้องการ

สำหรับรูปสามเหลี่ยมแล้ว ช่างสำรวจนิยมเอาหลักการของตรีโกณมิติพื้นราบเข้ามาช่วยในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ดังจะอธิบายเป็นภาพรวมพอสังเขปได้ดังนี้

รูปที่ 2.1.1 แสดงส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากรูป หากกำหนดให้

$\hat{A}$	=	มุมฉาก
a,b,c	=	ด้านของสามเหลี่ยม
θ	=	มุมใด ๆ ของสามเหลี่ยม

เมื่อเราทราบอีกสองส่วน คือ มุม 1 มุม และความยาวด้าน 2 ด้าน ก็สามารถคำนวณหาส่วนที่เหลือทั้งหมดได้ โดยอาศัยความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

1) จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยม มุมภายในรวมกันได้ 180° ดังนั้น

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$$

และ $$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{.................... (2.1.1)}$$

2) จากเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติพื้นราบ

$$\text{ไซน์ของมุมใด ๆ} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \qquad \text{.................... (2.1.2)}$$

$$\text{หรือ } \sin\theta = \frac{b}{a}$$

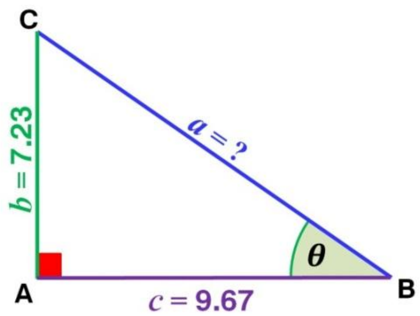
$$\text{โคไซน์ของมุมใด ๆ} = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \qquad \text{.................... (2.1.3)}$$

$$\text{หรือ } \cos\theta = \frac{c}{a}$$

$$\text{แทนเจนต์ของมุมใด ๆ} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} \qquad \text{.................... (2.1.4)}$$

$$\text{หรือ } \tan\theta = \frac{b}{c}$$

ตัวอย่างที่ 2.1.1 จากรูป ให้ b = 7.23 เมตรและ c = 9.67 เมตร จงหาขนาดของมุม B



วิธีทำ

จากสมการ (2.1.4)

$$\tan\theta = \frac{b}{c}$$

เมื่อ

b = ด้านตรงข้ามมุม B = 7.23 เมตร

c = ด้านประชิดมุม B = 9.67 เมตร

แทนค่า $\tan\theta = \dfrac{7.23}{9.67} = 0.7476732161$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}0.7476732161 = 36.78448078^\circ$

$= \underline{\underline{36^\circ 47' 04.13''}}$

<u>ตอบ</u>

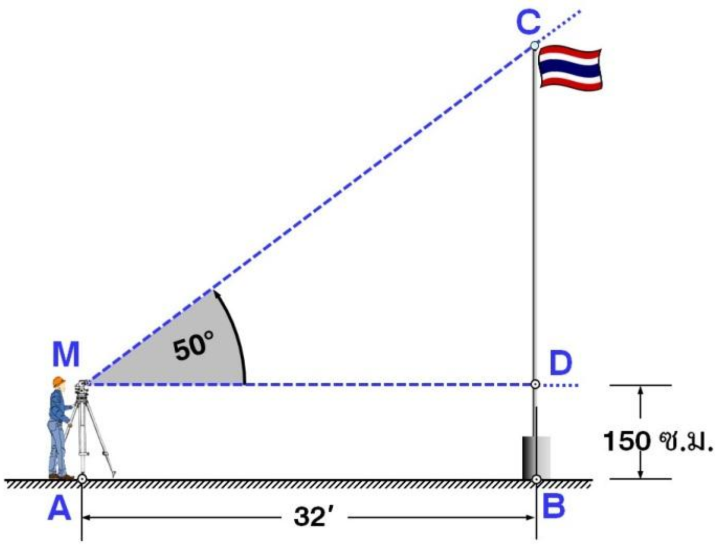
การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

การกดแป้น	**ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ**
7 . 2 3 ÷ 9 . 6 7 =	7.23÷9.67 0.747673216
SHIFT tan =	tan⁻¹ Ans 36.78448078
°’”	tan⁻¹ Ans 36°47°4.13

ตัวอย่างที่ 2.1.2 ในการรังวัดหาความสูงของเสาธงต้นหนึ่ง โดยช่างสำรวจตั้งกล้องสำรวจ ห่างจากเสาธง 32 ฟุต แล้วส่องเล็งไปยังยอดเสาธงเป็นมุมเงย 50° อยากทราบว่า เสาธงต้นนี้จะมีความสูงเท่าใด เมื่อกล้องสำรวจมีความสูง 150 ซ.ม.

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 สร้างรูปเพื่อการคำนวณ (ควรสร้างรูปทุกครั้ง หากไม่มีรูปประกอบ)



ขั้นที่ 2 ในรูป ΔMDC แปลงระยะให้มีหน่วยเดียวกัน ในที่นี้จะเป็นหน่วยเมตริก

ให้ MD∥AB และ MD = AB

ดังนั้น

$$MD = 32 \times 0.3048 = 9.7536 \text{ เมตร}$$

และ $$MA = BD = 1.50 \text{ เมตร}$$

ขั้นที่ 3 คำนวณหาความสูงของเสาธง (CB) จากรูปจะพบว่า

$$CB = CD + DB$$
$$= CD + 1.50 \text{ เมตร}$$

จากสมการ (1.8) จะได้ว่า

$$CD = MD\ \tan(\theta)$$

ดังนั้น $$CB = MD\ \tan(50^\circ) + 1.50$$
$$= 9.7536\tan(50^\circ) + 1.50$$
$$= 13.12388784 \rightarrow 13.124 \text{ เมตร}$$

$\therefore$ ความสูงของเสาธง = 13.124 เมตร

ตอบ

การกดเครื่องคำนวณ CASIO *fx*–991MS

การกดแป้น	ผลลัพธ์ที่ได้บนหน้าจอ
3 2 × · 3 0 4 8 =	32x.3048 9.7536
× tan 5 0 + 1 · 5 =	Ansxtan 50+1 13.12388784

สำหรับการแก้ปัญหาในลักษณะของสามเหลี่ยมมุมฉากนี้ อาจนำเอาทฤษฎีต่อไปนี้ มาช่วยแก้ปัญหาก็ได้

ถ้าให้ θ คือ มุมแหลมใด ๆ ของสามเหลี่ยมมุมฉากแล้ว สามารถสรุปได้ว่า

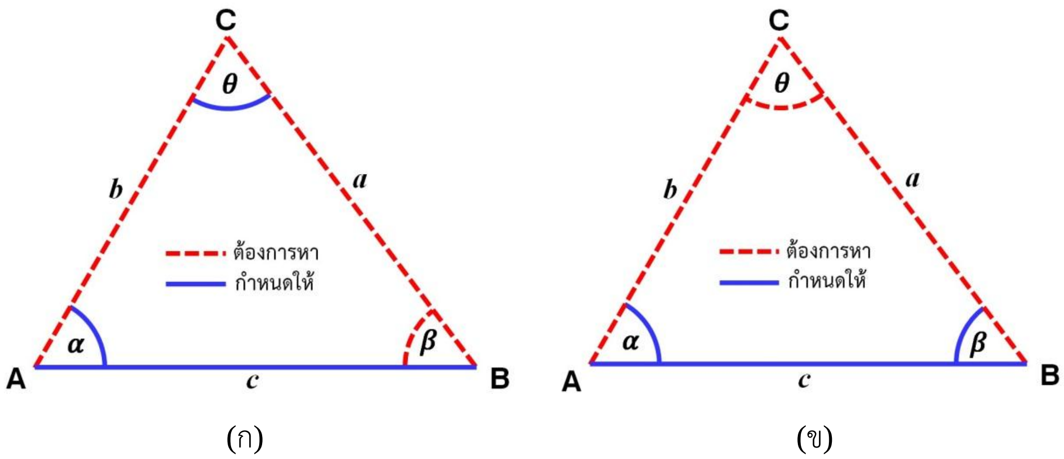
$$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\sin\ \theta} = \frac{\text{ด้านประชิดมุม } \theta}{\cos\ \theta} = \text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก} \quad \text{..............} \ (2.1.5)$$

จากทฤษฎีที่กล่าวมานี้ แม้ว่าจะมีประโยชน์ในการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมมุมฉากก็ตาม แต่งานรังวัดส่วนมากเป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ หรือ สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาจากทฤษฎีข้างต้นได้สะดวก เนื่องจากการวัดมุมฉากในสนามเป็นเรื่องยากที่จะวัดได้ฉากจริง เพราะต้องใช้อุปกรณ์ที่ละเอียดมากขึ้นใช้เวลามากขึ้น ส่วนมากใช้คุณสมบัติของสามเหลี่ยมใด ๆ ในการรังวัด เพราะใช้อุปกรณ์น้อยที่สุดและใช้เวลาไม่มากนัก แต่หากต้องการหาขนาดมุม ก็สามารถทำได้โดยอาศัย กฎของไซน์ และ กฎของโคไซน์ เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา ซึ่งก็ให้ความถูกต้องเป็นที่ยอมรับได้เช่นกัน

2.2 ความเข้าใจเกี่ยวกับสามเหลี่ยมเฉียง

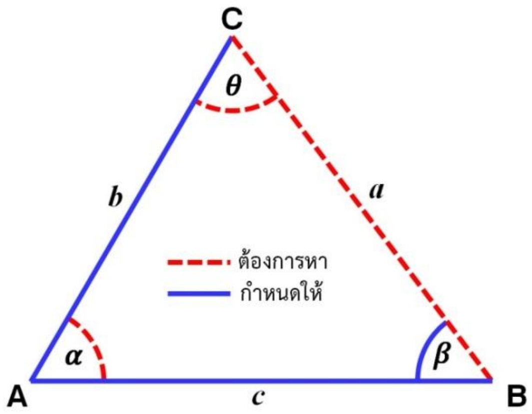
นอกจากสามเหลี่ยมที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ยังมีสามเหลี่ยมอีกประเภทหนึ่ง ตามหลักคณิตศาสตร์ ซึ่งเรียกว่า สามเหลี่ยมเฉียง (Oblique triangle) เป็นสามเหลี่ยมอีกแบบหนึ่งที่สามารถใช้สมการตรีโกณมิติต่าง ๆ เข้ามาช่วยคำนวณแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในลักษณะต่าง ๆ กัน และอาจกล่าวรวมได้ว่า สามเหลี่ยมใด ๆ ถ้าหากทราบเพียงบางส่วน ก็สามารถคำนวณหาส่วนที่เหลือได้ รวมถึงพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนั้นด้วย ในงานคำนวณต่าง ๆ สามารถแยกปัญหาได้หลายกรณีด้วยกัน ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อทราบขนาดของมุม 2 มุม และด้าน 1 ด้าน



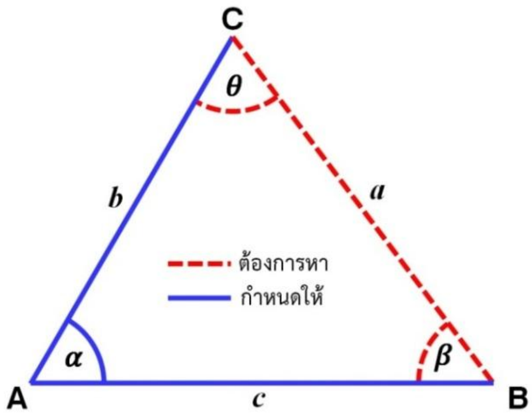
รูปที่ 2.2.1 แสดงรูปสามเหลี่ยมที่ทราบขนาดของมุม 2 มุม และด้าน 1 ด้าน

กรณีที่ 2 เมื่อทราบด้าน 2 ด้าน และมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านหนึ่งด้านใด



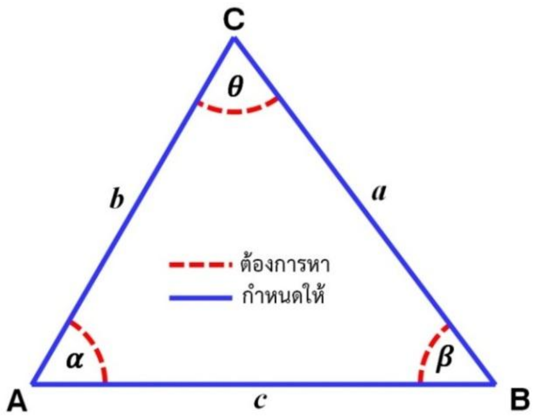
รูปที่ 2.2.2 แสดงรูปสามเหลี่ยมที่ทราบด้าน 2 ด้าน และมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านหนึ่งด้านใด

กรณีที่ 3 เมื่อทราบด้าน 2 ด้าน และมุมในระหว่างด้านทั้งสอง



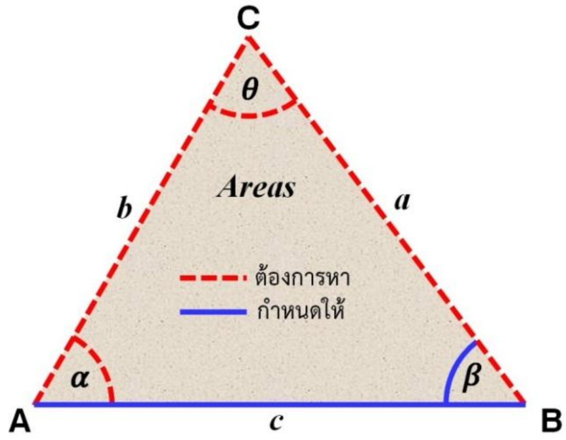
รูปที่ 2.2.3 แสดงรูปสามเหลี่ยมที่ทราบด้าน 2 ด้าน และมุมในระหว่างด้านทั้งสอง

กรณีที่ 4 เมื่อทราบด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม



รูปที่ 2.2.4 แสดงรูปสามเหลี่ยมที่ทราบด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม

กรณีที่ 5 เมื่อทราบเนื้อที่ ด้าน 1 ด้าน และมุมที่ปลายด้านที่ทราบ 1 มุม



รูปที่ 2.2.5 แสดงรูปสามเหลี่ยมที่ทราบเนื้อที่ ด้าน 1 ด้าน และมุมที่ปลายด้านที่ทราบ 1 มุม

จากกรณีต่าง ๆ ที่กล่าวมานี้ เราสามารถคำนวณหาส่วนที่ขาดหายไปได้ทุกส่วนตามต้องการ หากแต่มีข้อควรคำนึงอยู่ 2 ประการดังนี้

2.2.1 มุมภายในของสามเหลี่ยมต้องรวมกันได้ 180° พอดี

2.2.2 ด้านของสามเหลี่ยมใด ๆ เมื่อรวมกัน 2 ด้าน ต้องยาวกว่าด้านที่ 3 เสมอ ไม่ว่าจะเป็นการรวมในทิศทางใดก็ตาม

ข้อ 2.2.1 และ 2.2.2 นี้ เป็นคุณสมบัติของสามเหลี่ยมพื้นราบทุกรูป ดังนั้นการแก้ปัญหาจึงต้องอาศัยหลักทางตรีโกณมิติพื้นราบเข้ามาช่วย ในที่นี้จะขอกล่าวไว้เพียงพื้นฐานในการนำไปใช้หรือเป็นแนวทางของความคิดเท่านั้น และอาจกล่าวได้ว่า การคำนวณเกี่ยวกับสามเหลี่ยมนี้ จัดเป็นปัจจัยพื้นฐานที่ผู้เรียนควรให้ความสนใจ และควรศึกษาให้เข้าใจถึง คุณสมบัติ คุณลักษณะ และเอกลักษณ์ต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมทุกรูป โดยมีข้อควรปฏิบัติดังนี้

1) รูปสามเหลี่ยมพื้นราบทุกรูป ต้องมีมุมภายในรวมกันเท่ากับ 180° เสมอ
2) ผลรวมของด้านสองด้าน ต้องยาวกว่าด้านที่สามเสมอ
3) การแก้ปัญหาทุกครั้ง ควรสร้างรูปจำลองสภาพปัญหาเสมอ

ข้อสังเกต การวัดสามเหลี่ยมในสนาม ควรต้องวัดระยะให้ได้ทั้งสามด้าน และควรหลีกเลี่ยงบริเวณที่รังวัดได้ลำบาก หรือมีอุปสรรคกีดขวางแนวรังวัด หากจำเป็นจริง ๆ ต้องวัดด้วยความละเอียดและความประณีตทุกครั้ง