1.2 ความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับรูปเหลี่ยม

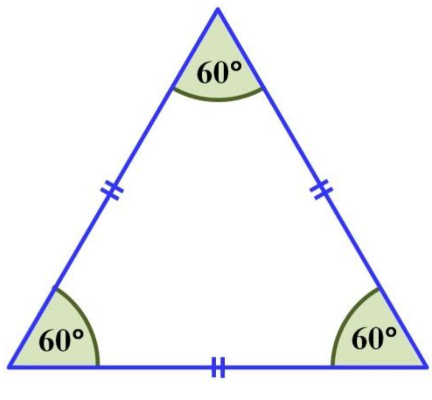
บริเวณที่ช่างสำรวจทำการรังวัดส่วนใหญ่ โดยมากมีรูปร่างเป็นเหลี่ยมต่าง ๆ มากมายหลายเหลี่ยม หรือเป็นรูปร่างที่เกิดจากรูปเรขาคณิตเรียงต่อเนื่อง หรือทับซ้อนกันจนเต็มพื้นที่หากว่ารูปร่างที่ปรากฏนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยม หรือสี่เหลี่ยมด้วยแล้ว ช่างสำรวจก็สามารถคำนวณหาพื้นที่ได้ง่ายและขึ้นรูปแผนที่ได้สะดวก เป็นต้น ในความเป็นจริงพื้นที่ที่สำรวจส่วนมาก มักเป็นรูปหลายเหลี่ยมหรือมีลักษณะอื่น ๆ นอกเหนือไปจากรูปเรขาคณิต ทำให้เกิดความยุ่งยากในการคำนวณหาพื้นที่ และมีความซับซ้อนในการขึ้นรูปแผนที่เป็นอย่างมาก ช่างสำรวจสมัยก่อนจึงเกิดแนวคิดต่าง ๆ เพื่อหาวิธีคำนวณอยู่ในรูปที่ง่าย สะดวก รวดเร็ว และมีความผิดพลาดน้อยที่สุด โดยเอารูปเรขาคณิตที่ง่ายต่อการรังวัด การคำนวณ และการลงที่หมายหรือสร้างรูปแผนที่ เช่น รูปสามเหลี่ยม และหรือรูปสี่เหลี่ยมซึ่งจัดเป็นรูปเรขาคณิตที่ไม่มีความซับซ้อน และสะดวกต่อการคำนวณเป็นอย่างมาก ดังนั้นช่างสำรวจมือใหม่ จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องศึกษาให้เกิดความเข้าใจในคุณสมบัติ รูปร่าง เอกลักษณ์ต่าง ๆ ตลอดจนสูตรคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง เช่น สมการตรีโกณพื้นราบ กับการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่อาจเกิดขึ้น สูตรการหาพื้นที่และปริมาตรของรูปต่าง ๆ เป็นต้น ดังจะได้กล่าวในรายละเอียดต่อไป

1.2.1 การจำแนกรูปสามเหลี่ยม

รูปเหลี่ยมที่ช่างสำรวจทุกคนต้องมีความรู้ ความเข้าใจ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ง่าย และสะดวก เช่น รูปสามเหลี่ยม (Triangle) เป็นต้น รูปสามเหลี่ยมยังเป็นรูปพื้นฐานของงานคำนวณอื่น ๆ อีกมากด้วย รูปสามเหลี่ยมจะประกอบด้วยจุดยอดสามจุด และด้านที่เป็นเส้นตรงสามด้าน ซึ่งเราอาจจำแนกรูปสามเหลี่ยมได้ 2 กลุ่มใหญ่ ๆ ดังนี้

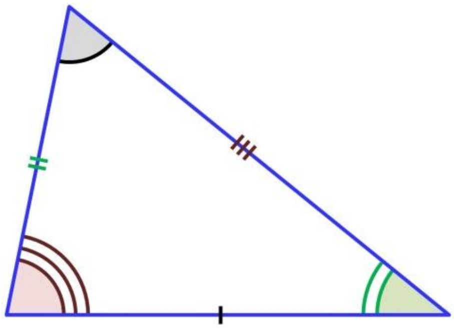
1.2.1.1 จำแนกตามความยาวของด้าน พอที่จะสรุปออกมาได้ 3 รูปด้วยกันดังนี้

1) สามเหลี่ยมด้านเท่า (Equilateral triangle) จะมีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน มุมยอดของรูปก็ต้องเท่ากันทุกมุม โดยแต่ละมุมจะมีขนาดเท่ากับ 60° ดังแสดงในรูปที่ 1.2.1



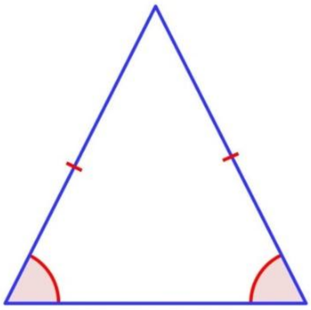
รูปที่ 1.2.1 แสดงลักษณะของสามเหลี่ยมด้านเท่า

2) สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (Scalene triangle) เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวของด้านทั้งสามแตกต่างกันและไม่เท่ากัน มุมภายในก็จะมีขนาดแตกต่างกันด้วยดังแสดงในรูปที่ 1.2.2



รูปที่ 1.2.2 แสดงลักษณะของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

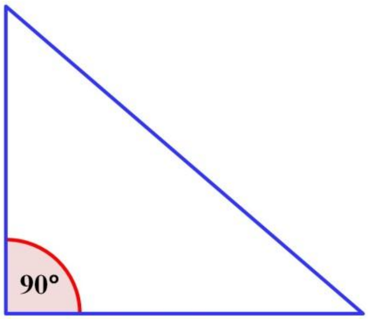
3) สามเหลี่ยมหน้าจั่ว (Isosceles triangle) เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน มีมุมเท่ากันสองมุม และอยู่ตรงข้ามด้านที่เท่ากันด้วยเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 1.2.3



รูปที่ 1.2.3 แสดงลักษณะของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

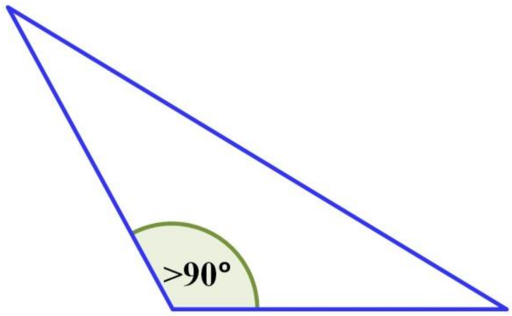
1.2.1.2 จำแนกตามขนาดของมุมภายในที่ใหญ่ที่สุด จำแนกออกได้ 3 รูปดังนี้

1) สามเหลี่ยมมุมฉาก (Right triangle) เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในหนึ่งมุมมีขนาด 90° (มุมฉาก) ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉากจะเป็นด้านที่ยาวที่สุด และอีกสองด้านนิยมเรียกว่า ด้านประกอบมุมฉาก ดังรูปที่ 1.2.4



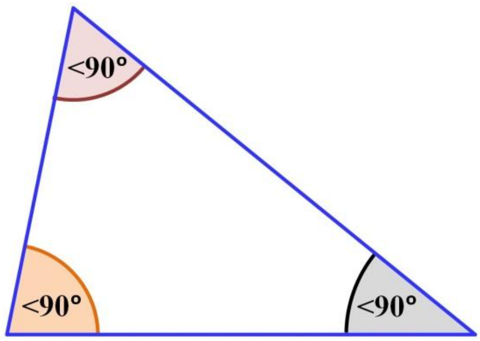
รูปที่ 1.2.4 แสดงลักษณะของสามเหลี่ยมมุมฉาก

2) สามเหลี่ยมมุมป้าน (Obtuse triangle) เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในมุมใดมุมหนึ่งขนาดใหญ่กว่า 90° เสมอ ดังรูปที่ 1.2.5



รูปที่ 1.2.5 แสดงลักษณะของสามเหลี่ยมมุมป้าน

3) สามเหลี่ยมมุมแหลม (Acute triangle) เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในทุกมุมมีขนาดเล็กกว่า 90° และมีขนาดไม่เท่ากันด้วย ดังรูปที่ 1.2.6

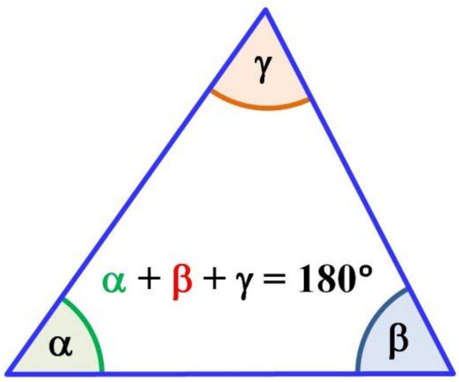


รูปที่ 1.2.6 แสดงลักษณะของสามเหลี่ยมมุมแหลม

1.2.2 **เรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยม**

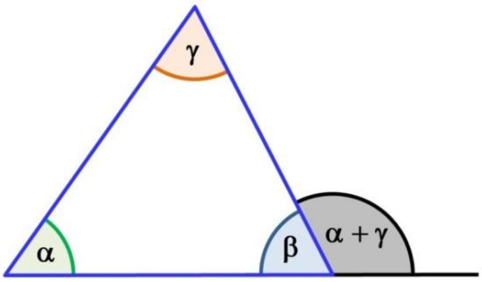
1.2.2.1 สามเหลี่ยมใด ๆ หรือสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (Scalene triangle)

1) มุมภายในรวมกันได้ 2 มุมฉาก หรือ 180° หรือ π^{rad} หรือ 200^{g}



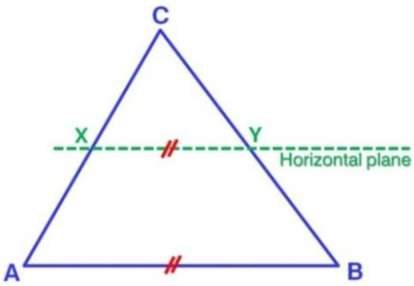
รูปที่ 1.2.7 แสดงการรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม

2) มุมภายนอกบนด้านหนึ่งของรูปจะมีขนาดเท่ากับ ผลรวมของมุมที่ไม่ใช่มุมประชิดกับมุมภายนอก ดังรูปที่ 1.2.8



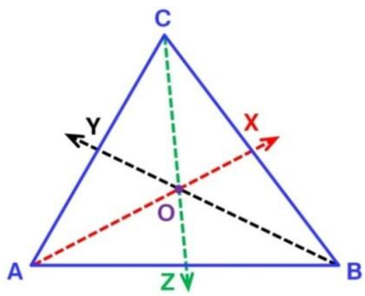
รูปที่ 1.2.8 แสดงผลรวมของมุมที่ไม่ใช่มุมประชิดกับมุมภายนอก เท่ากับมุมภายนอก

3) เส้นตรงหรือระนาบราบ (Horizontal plane) ที่ตัดผ่านจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านย่อมขนานกับด้านที่เหลือเสมอ ดังรูปที่ 1.2.9 หากให้ AX = CX และ BY = CY จะทำให้ XY∥AB เสมอ



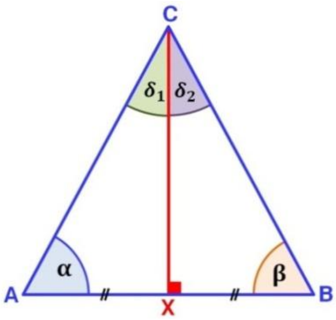
รูปที่ 1.2.9 แสดงแนวระนาบที่ตัดผ่านกึ่งกลางของด้านสองด้าน

4) เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดของสามเหลี่ยมไปยังกึ่งกลางด้านฐานที่อยู่ตรงข้ามกับจุดนั้น ๆ ย่อมตัดกันเป็นจุดเดียวกันด้วย ในทางคณิตศาสตร์เรียกจุดนี้ว่า จุดเซ็นทรัล (Central point) และระยะทางจากจุดเซ็นทรัลถึงจุดยอดของสามเหลี่ยม จะเท่ากับสองเท่าของระยะทางจากจุดเซ็นทรัล (O) ถึงกึ่งกลางด้านฐานแต่ละด้านเสมอ ดังรูปที่ 1.2.10 หากเราให้ AY = YC, AZ = ZB และ BX = XC แล้วจะทำให้ OC = 2(OZ), OA = 2(OX) และ OB = 2(OY) เป็นต้น



รูปที่ 1.2.10 แสดงเส้นที่ลากผ่านจุดยอดและตัดผ่านกึ่งกลางของด้านทั้งสาม

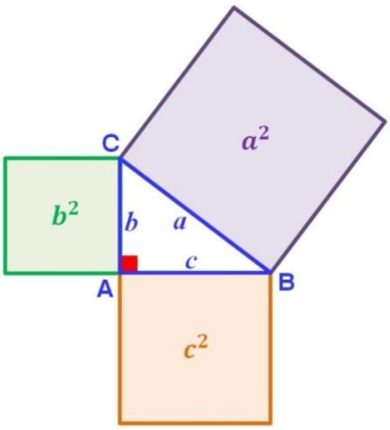
1.2.2.2 คุณสมบัติของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (Isosceles triangle) อีกประการหนึ่ง กล่าว คือ ระนาบดิ่งที่ผ่านกึ่งกลางด้านฐาน และมุมยอดที่อยู่ตรงข้ามด้าน ย่อมแบ่งครึ่งมุมยอด และตั้งฉากกับด้านที่แนวระนาบผ่านด้วยเสมอ ในรูปที่ 1.2.11 หากให้ AX = XB และ $\delta_1 = \delta_2$ ย่อมทำให้ $CX \perp AB$ เสมอ



รูปที่ 1.2.11 แสดงแนวระนาบดิ่งที่ตัดผ่านกึ่งกลางของด้านฐานของรูป

1.2.2.3 คุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉาก (Right–angled triangle) เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมใดมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก หรือขนาดมุมเท่ากับ 90° หรือ 100^g หรือ $0.5\pi^{rad}$ สามเหลี่ยมมุมฉากนี้ H.S. Hall, M.A. & F.H. Stevens, M.A.[4] ได้กล่าวถึง คุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีพีทากอรัส (Pythagoras theorem) ไว้ว่า ด้านตรงข้าม มุมฉากจะมีขนาดเท่ากับ รากที่สองของผลรวมของด้านประกอบมุมฉากทั้งสองรวมกัน หรือพื้นที่ของรูปจัตุรัสที่อยู่ตรงข้ามมุมฉาก จะเท่ากับผลรวมของพื้นที่รูปจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉากทั้งสองเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 1.2.12 เมื่อให้ A เป็นมุมฉากแล้ว เราสามารถเขียนคุณสมบัติได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ \text{หรือ} \quad a &= \sqrt{b^2 + c^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{........................} \ (1.2.1)$$

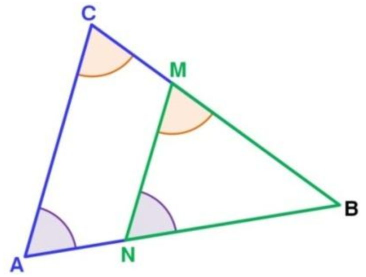


รูปที่ 1.2.12 แสดงคุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉาก

[4] ที่มา : H.S. Hall, M.A. & F.H. Stevens, M.A., School Geometry. 1955. (หน้า 118–119)

1.2.2.4 คุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย (Analogous triangle) มักจะใช้กับสามเหลี่ยมตั้งแต่สองรูปขึ้นไป ซึ่งต่างก็มีขนาดของมุมที่เท่ากันมุมต่อมุม ผลที่ได้ตามมาคือ ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม ที่เท่ากัน ย่อมมีความยาวเป็นสัดส่วน หรืออัตราส่วนกันเสมอ ดังรูปที่ 1.2.13 เมื่อกำหนดให้ $B\hat{A}C = B\hat{N}M$ และ $B\hat{C}A = B\hat{M}N$ เราจะได้อัตราส่วนดังนี้

$$\frac{BN}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{NM}{AC} \qquad \text{.................... (1.2.2)}$$

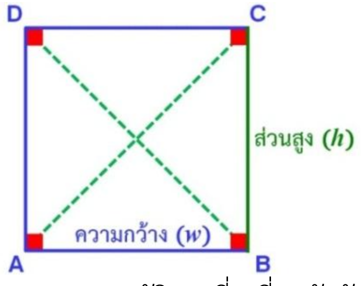


รูปที่ 1.2.13 แสดงคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย

สำหรับคุณสมบัติของสามเหลี่ยมที่กล่าวมาแล้วนี้ เป็นเพียงส่วนหนึ่งที่อาจนำมาช่วยในการคำนวณงานสำรวจได้ และนิยมใช้กันเท่านั้น ซึ่งนอกเหนือจากนี้จะไม่ขอกล่าวถึง ส่วนรูปสามเหลี่ยมที่ช่างสำรวจใช้กันบ่อยมากคือ สามเหลี่ยมใด ๆ และสามเหลี่ยมมุมฉาก จัดเป็นรูปที่ใช้ในการรังวัดมากที่สุด การวัดระยะทางในงานสำรวจภูมิประเทศมักนิยมใช้ข้อมูลเกี่ยวกับระยะทางในรูปของสามเหลี่ยม และให้มีความใกล้เคียงกัน หรือพยายามให้เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าให้มากที่สุด และไม่นิยมวัดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมป้านหรือมุมแหลมมากเกินไป ทั้งนี้เพื่อให้รูปสามเหลี่ยมเกิดความมั่นคงสูงที่สุดนั่นเอง

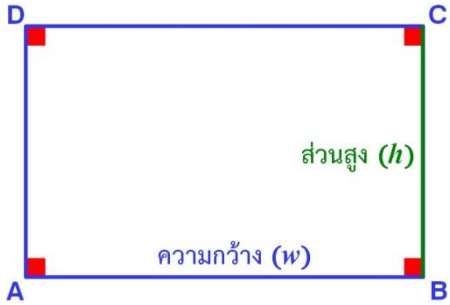
1.2.3 **คุณสมบัติของรูปเหลี่ยมทั่วไป** เป็นคุณสมบัติทั่วไปของรูปเหลี่ยมต่าง ๆ ที่ควรรู้ เช่น รูปสี่เหลี่ยม ห้าเหลี่ยม หรือมากกว่า จะขอกล่าวเพียงสังเขปดังนี้

1.2.3.1 สี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือด้านเท่า (Square) หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก และความยาวของด้านทั้งสี่เท่ากัน จะทำให้ความยาวของเส้นทแยงมุมมีขนาดเท่ากันด้วย ดังรูปที่ 1.2.14 หากให้ $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$ และ $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ เราจะพบว่า $\overline{AC} = \overline{BD}$



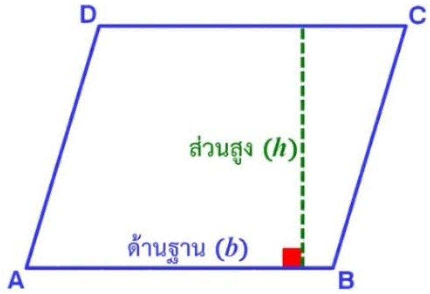
รูปที่ 1.2.14 แสดงคุณสมบัติของสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือด้านเท่า

1.2.3.2 สี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือด้านฉากหรือมุมฉาก (Rectangle) เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก และความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามกันจะมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ เสมอ ดังแสดงในรูปที่ 1.2.15 โดย $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$ (ทุกมุมเป็นมุมฉาก) ด้าน $\overline{AB} = \overline{CD}$ และ $\overline{BC} = \overline{DA}$ จะได้ว่า $\overline{AC} = \overline{BD}$ เช่นกัน



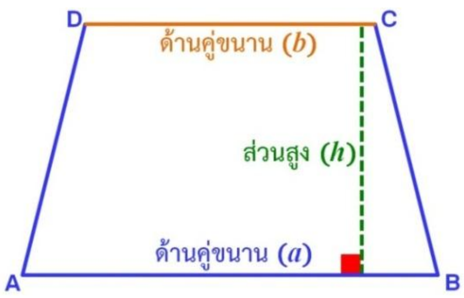
รูปที่ 1.2.15 แสดงคุณสมบัติของสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือด้านฉากหรือมุมฉาก

1.2.3.3 สี่เหลี่ยมด้านขนานหรือคู่ขนาน (Parallelogram) หมายถึง สี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามกันขนาดเท่ากัน และขนานกันเป็นคู่ ๆ ดังแสดงในรูปที่ 1.2.16 จะพบว่า $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$, $AB = CD$ และ $AD = BC$



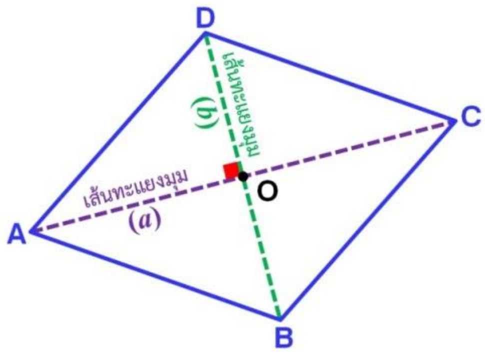
รูปที่ 1.2.16 แสดงคุณสมบัติของสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือคู่ขนาน

1.2.3.4 สี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoid) หมายถึง สี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามกันขนานกันเพียงคู่เดียว และมีความยาวไม่เท่ากัน ดังแสดงในรูปที่ 1.2.17 จะได้ว่า $AB \parallel CD$, $AB \ncong CD$ และ $AD \ncong BC$



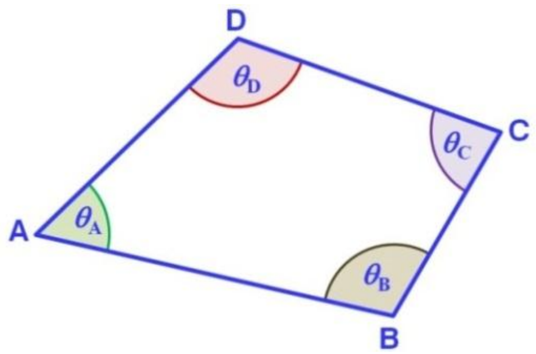
รูปที่ 1.2.17 แสดงคุณสมบัติของสี่เหลี่ยมคางหมู

1.3.3.5 สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (Rhombus) หมายถึง สี่เหลี่ยมที่มีความยาวของเส้นทะแยงมุมไม่เท่ากัน แต่ตั้งได้ฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน ดังรูปที่ 1.2.18 จะได้ว่า $AC \perp BD$, $AO = OC$ และ $BO = OD$



รูปที่ 1.2.18 แสดงคุณสมบัติของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

1.2.3.6 สี่เหลี่ยมใด ๆ หรือด้านไม่เท่า (Quadrilateral) หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านประกอบมุมทั้งสี่ขนาดไม่เท่ากัน แต่สมนัยกันซึ่งกันและกัน ในบางครั้งเราอาจเรียกว่าสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้ ดังในรูปที่ 1.2.19 จะเห็นว่า $AB \neq BC \neq CD \neq DA$ และ $\theta_A \neq \theta_B \neq \theta_C \neq \theta_D$



รูปที่ 1.2.19 แสดงคุณสมบัติของสี่เหลี่ยมใด ๆ หรือด้านไม่เท่า

นอกจากรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ ที่กล่าวข้างต้น ยังอาจมีรูปเหลี่ยมอื่น ๆ อีกมากมาย แต่มีกฎเกณฑ์ที่ควรจดจำ คือ รูปเหลี่ยมใด ๆ สามารถหาผลรวมของมุมภายใน และผลรวมมุมภายนอกของรูปเหลี่ยม[5] ได้จากสมการ (1.2.3) และ สมการ (1.2.4) ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \text{ผลรวมของมุมราบภายใน} &= (n-2)\times 180^\circ \\ \text{หรือ} &= (n-2)\times \pi^{rad} \\ \text{หรือ} &= (n-2)\times 200^{g} \end{aligned}\right\} \quad \text{.....................} \ (1.2.3)$$

[5] ที่มา : ยรรยง ทรัพย์สุขอำนวย. วิศวกรรมสำรวจ 1. 2550. (หน้า 249)

$$\left.\begin{aligned} \text{และ ผลรวมของมุมภายนอก} &= (n+2)\times 180^{\circ} \\ \text{หรือ} &= (n+2)\times \pi^{rad} \\ \text{หรือ} &= (n+2)\times 200^{g} \end{aligned}\right\} \quad \text{.....................} \ (1.2.4)$$

เมื่อ n = จำนวนมุม หรือด้าน หรือจุดของรูปเหลี่ยมนั้น ๆ