ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับสามเหลี่ยม

คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ กับการนำมาใช้ในงานคำนวณ

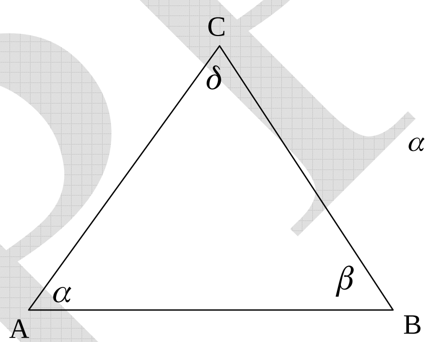
(The properties and using for an angularity)

งานสำรวจโดยทั่วไปจะต้องมีงานรังวัดระยะทางและมุมเข้ามาเกี่ยวข้องสัมพันธ์กันมากที่สุด โดยเฉพาะในเรื่องของการวัดระยะทาง ช่างสำรวจส่วนใหญ่นิยมการรังวัดระยะทางในลักษณะของสามเหลี่ยม เนื่องจากมีความมั่นคงสูงในเรื่องของความถูกต้อง และสามารถโยงเข้าไปหา หรือคำนวณส่วนอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องได้ดี ประกอบกับการคำนวณที่ต้องอาศัยหลักการทางคณิตศาสตร์ในเรื่องของสามเหลี่ยมด้วย ทำให้ผลลัพธ์ออกมาน่าเชื่อถือที่สุด ดังนั้นเราจึงต้องศึกษาเรื่องของสามเหลี่ยม ให้เป็นที่เข้าใจ ทั้งในด้านคุณสมบัติและการนำมาประยุกต์ใช้กับงานคำนวณได้อย่างเหมาะสมก่อนดังนี้

คุณสมบัติที่สำคัญของรูปสามเหลี่ยม

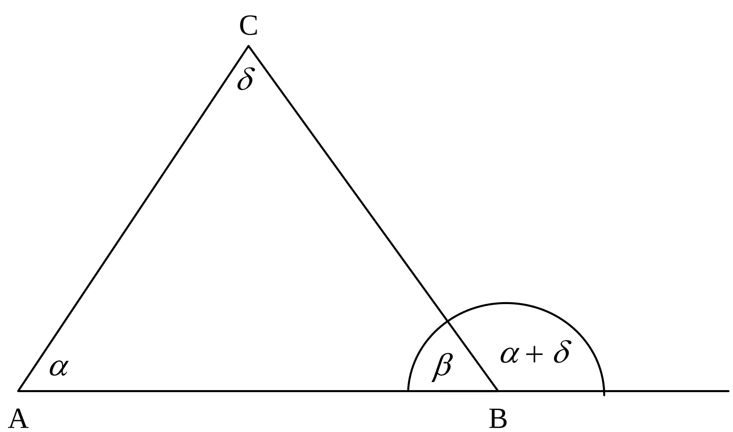
1. สามเหลี่ยมใด ๆ หรือสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (A Scalene Triangle)

1.1. มุมภายในต้องรวมกันเท่ากับ 2 มุมฉาก หรือ π rad หรือ 200^g หรือ $180°$ เสมอ

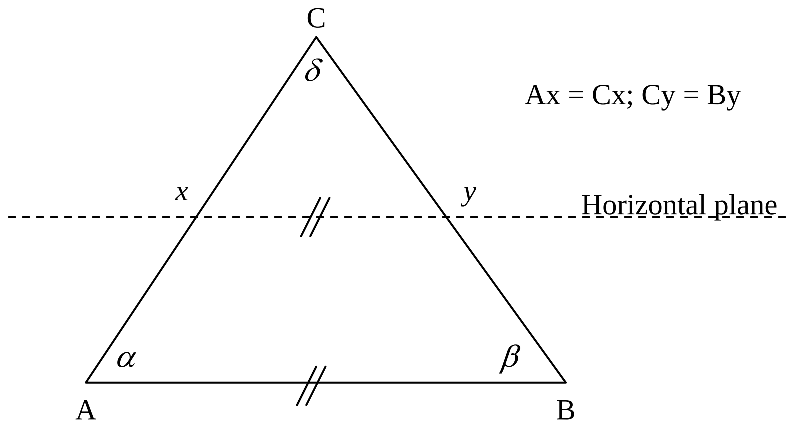


$$\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$$

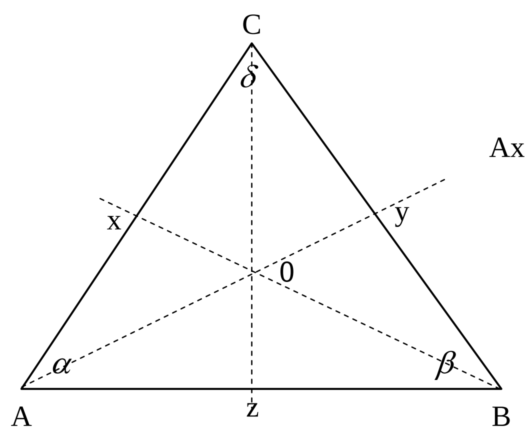
1.2. มุมภายนอกบนด้านหนึ่งของรูป จะมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมที่ไม่ใช่มุมประชิดกับมุมภายนอกนั้น



1.3. ส่วนของเส้นตรงหรือระนาบราบ (horizon plane) ที่ตัดผ่านจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านย่อมขนานกับด้านที่เหลือเสมอ

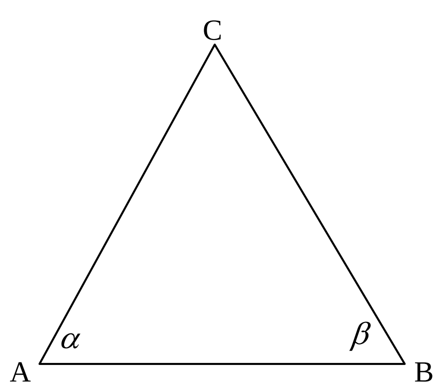


1.4. เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดของสามเหลี่ยมไปยังด้านฐานที่อยู่ตรงข้ามกับจุดนั้น ๆ ย่อมตัดกันเป็นจุดเดียวกันด้วย (ในทางหลักคณิตศาสตร์เรียกจุดนี้ว่าจุด Central และระยะทางจาก จุด Central ถึง จุดยอดของสามเหลี่ยมจะ เท่ากับ สองเท่าของระยะทางจาก จุด Central ถึงกึ่งกลางด้านฐานแต่ละด้านเสมอ



2. คุณสมบัติของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (An Isosceles Triangle)

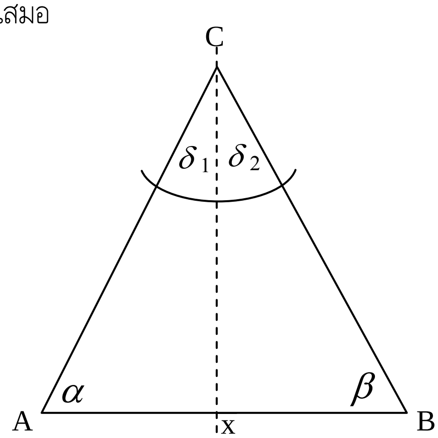
2.1. มีด้านสองด้านที่มีความยาวเท่ากัน และมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองจะมีขนาดเท่ากันด้วย



$\beta = \alpha$

$\therefore$ AC = BC

2.2. ระนาบดิ่งที่ผ่านกึ่งกลางด้านฐาน และมุมยอดที่อยู่ตรงข้ามด้าน ย่อมแบ่งครึ่งมุมยอดและตั้งฉากกับด้านที่แนวระนาบผ่านด้วยเสมอ

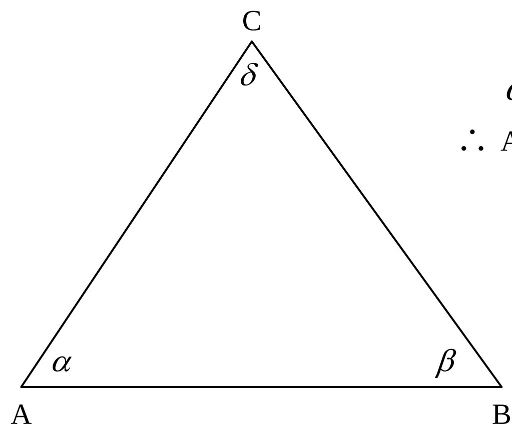


Ax = Bx

Cx ตั้งฉาก AB ที่ x

$$\therefore \delta_1 = \delta_2$$

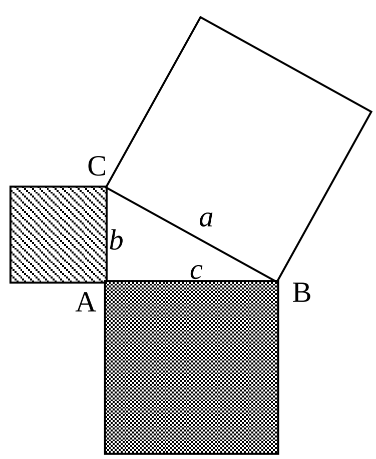
3. คุณสมบัติของสามเหลี่ยมด้านเท่า (An Equilateral Triangle) เป็นสามเหลี่ยมที่มีความยาวของด้านทั้ง 3 เท่ากัน ทุกด้าน ย่อมทำให้มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านเท่ากันทุกมุมด้วยเสมอ



$$\alpha = \beta = \delta$$

$\therefore$ AB = AC = BC

4. คุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉาก (A Right-angled Triangle) เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุมใดมุมหนึ่งเป็น มุมฉาก หรือ 90° หรือ 100^g หรือ $\pi/2$ rad ซึ่งก็คือ พื้นที่ของรูปจัตุรัสที่อยู่ตรงข้ามมุมฉาก จะเท่ากับ ผลรวมของ พื้นที่รูปจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้านที่เหลือเสมอ



เมื่อ A เป็นมุมฉาก

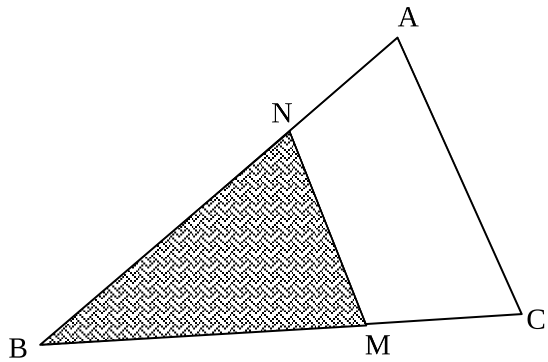
$A^2 = B^2 + C^2$

ดังนั้น

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

อนึ่ง สำหรับสามเหลี่ยมมุมฉากนี้ตามหลักการเรขาคณิตมีทฤษฎีบทที่ 29 ที่ว่าด้วย เรื่องของสามเหลี่ยมมุมฉากไว้ว่า "ด้านตรงข้ามมุมฉากจะมีขนาด เท่ากับ รากที่สองของผลรวมของด้านประกอบมุมฉากทั้งสองรวมกัน" หรืออาจใช้อัตราส่วนของ 3:4:5 ซึ่งได้จากทฤษฎีบทที่ 29 ของ Pythagoras

5. คุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย (An Analogous Triangle) มักจะใช้กับสามเหลี่ยมตั้งแต่สองรูปขึ้นไป ซึ่งต่างก็มีขนาดของมุมที่เท่ากันมุมต่อมุม ผลที่ได้ตามมาคือ ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่าย่อมมีความยาวเป็นสัดส่วน หรืออัตราส่วนกันเสมอ ดังรูป



$\angle$BAC = $\angle$BNM และ
$\angle$BCA = $\angle$BMN
เราจะได้อัตราส่วนดังนี้

$$\frac{NB}{AB} = \frac{MB}{CB} = \frac{MN}{CA}$$

สำหรับคุณสมบัติของสามเหลี่ยมที่กล่าวมานี้ เป็นเพียงส่วนหนึ่งที่อาจนำมาช่วยในการคำนวณงานสำรวจได้ และที่นิยมใช้กันเท่านั้น ซึ่งนอกเหนือจากนี้จะไม่ขอกล่าวถึง ส่วนรูปสามเหลี่ยมที่ช่างสำรวจใช้กันบ่อยมากคือ สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า และสามเหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปที่ใช้ในการรังวัดระยะ และช่างสำรวจจะพยายามรังวัดระยะสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าให้มีความใกล้เคียงกัน หรือพยายามให้เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าให้มากที่สุดและไม้นิยมวัดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมป้าน (มุมที่ยอดของสามเหลี่ยมใหญ่กว่ามุมที่ฐานทั้งสองรวมกัน) หรือเป็นมุมแหลมมากเกินไป (มุมที่ยอดของสามเหลี่ยมมีขนาดเล็กกว่าครึ่งหนึ่งของมุมที่ฐานที่มีขนาดเล็กสุด)

คุณสมบัติของรูปเหลี่ยมอื่น ๆ ที่ควรทราบ

ส่วนคุณสมบัติของรูปเหลี่ยมอื่น ๆ นี้ เช่น รูปสี่เหลี่ยม ห้าเหลี่ยม หรือมากกว่าก็จะขอกล่าวแต่เพียงสังเขปดังนี้

1. คุณสมบัติของสี่เหลี่ยมจัตุรัส หรือสี่เหลี่ยมด้านเท่า (a Square) หมายถึงรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก และความยาวของด้านทั้งสี่มีขนาดเท่ากัน และความยาวของเส้นทแยง มุมมีขนาดเท่ากันด้วย

2. คุณสมบัติของสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือสี่เหลี่ยมมุมฉาก (a Rectangle) หมายถึงรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก และความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามกันจะมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ เสมอ

3. คุณสมบัติของสี่เหลี่ยมด้านขนาน (a Parallelogram) หมายถึง สี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามกันขนาดเท่ากัน และขนานกันเป็นคู่ ๆ

4. คุณสมบัติของสี่เหลี่ยมคางหมู (a Trapezoid) หมายถึง สี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามกันขนานกันเพียงคู่เดียว และมีความยาวไม่เท่ากัน

5. คุณสมบัติของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (a Rhombus) หมายถึง สี่เหลี่ยมที่มีความยาวของเส้นทะแยงมุมไม่เท่ากัน แต่ตั้งได้ฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

6. คุณสมบัติของสี่เหลี่ยมใดๆ (a Quadrilateral) หมายถึง สี่เหลี่ยมที่มีด้านประกอบมุมทั้งสี่ขนาดไม่เท่ากัน แต่สมนัยกันซึ่งกันและกัน ในบางครั้งเราอาจเรียกว่าสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้

นอกจากรูปสี่เหลี่ยมต่างๆ ที่กล่าวข้างต้น ยังอาจมีรูปสี่เหลี่ยมอื่นๆ อีก หมายถึง รูปเหลี่ยมที่มีด้านประกอบมุมที่ยาวเท่ากันก็จะเรียกว่า รูปเหลี่ยมด้านเท่า หากด้านไม่เท่ากันก็จะเรียกว่า รูปเหลี่ยมด้านไม่เท่า แต่ประการสำคัญก็คือ รูปสี่เหลี่ยมทุกรูปจะต้องมีมุมภายในเมื่อรวมกันแล้วต้องเท่ากับ 180° หรือ 2 มุมฉาก หรือ π rad หรือ 100^g พอดี

หากเราพบรูปที่มีเหลี่ยมมากกว่าสามเหลี่ยมขึ้นไป เราก็สามารถหาขนาดผลรวมของมุมภายใน และภายนอกรูปเหลี่ยมทุกรูปได้ จากสมการต่อไปนี้

	ผลรวมของมุมภายใน	$= (n-2)180°$	หรือ	$= (n-2)\ \pi$ rad	หรือ	$= (n-2)200^g$
และ	ผลรวมของมุมภายนอก	$= (n+2)180°$	หรือ	$= (n+2)\ \pi$ rad	หรือ	$= (n+2)200^g$

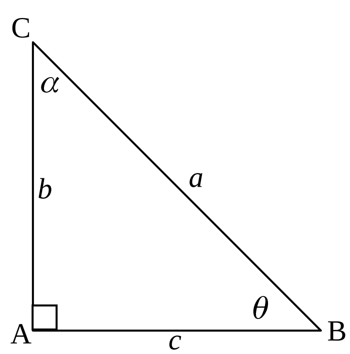
การประยุกต์เพื่อการคำนวณงานสำรวจ

การประยุกต์รูปทรงสามเหลี่ยมทางเรขาคณิต เพื่อนำมาใช้ในงานคำนวณแผนที่สำรวจ โดยมีจุดประสงค์ 2 ประการดังนี้

1. ต้องการทราบขนาดของพื้นที่
2. ต้องการแก้ปัญหา หรือคำนวณหาในสิ่งที่ต้องการ

ในการคำนวณโดยมากจะใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติพื้นราบ (Trigonometric identities) ช่วยในการคำนวณ

จากรูป



จากรูป เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

กำหนดให้

A = มุมฉาก

a = ด้านตรงข้ามมุมฉาก

b, c = ด้านประกอบมุมฉาก

θ, α = มุมใด ๆ ของสามเหลี่ยม

เมื่อ ขนาดของมุมมีหน่วยในระบบองศา ในลักษณะเช่นนี้ หากเราทราบอีกสองส่วน คือ มุม 1 ระยะ 1 ด้าน หรือ ระยะ 2 ระยะ เราก็สามารถคำนวณหาส่วนที่เหลือทั้งหมดได้ โดยอาศัยความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

1. จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยม "มุมภายในรวมกันได้ 180°" ดังนั้น

A = B+C และ $a^2 = b^2 + c^2$ .... (Theory of Pythagoras) (1)

2. จากเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติพื้นราบ

$$\text{Sine ของมุมใดๆ} = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมนั้น}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

หรือ $$Sin\theta = \frac{b}{a};\quad Sin\alpha = \frac{c}{a} \qquad \text{.. (1A)}$$

$$\text{Cosine ของมุมใดๆ} = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุมนั้น}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

หรือ $$Cos\theta = \frac{c}{a};\quad Cos\alpha = \frac{b}{a} \qquad \text{.. (1B)}$$

$$\text{Tangent ของมุมใดๆ} = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมนั้น}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุมนั้น}}$$

หรือ $$Tan\theta = \frac{b}{c};\quad Tan\alpha = \frac{c}{b} \qquad \text{.. (1C)}$$

ตัวอย่าง จากรูปข้างต้น ถ้ากำหนดให้ b = 7.23 และ c = 9.67 จงคำนวณหาขนาดของมุม B (θ)

วิธีทำ

จากสมการ (1C)

$$\tan\theta = \frac{b}{c} = \frac{7.23}{9.67} = 0.747673216$$

$$\therefore \theta = \arctan(0.747673216) = 36°47'04.13''$$

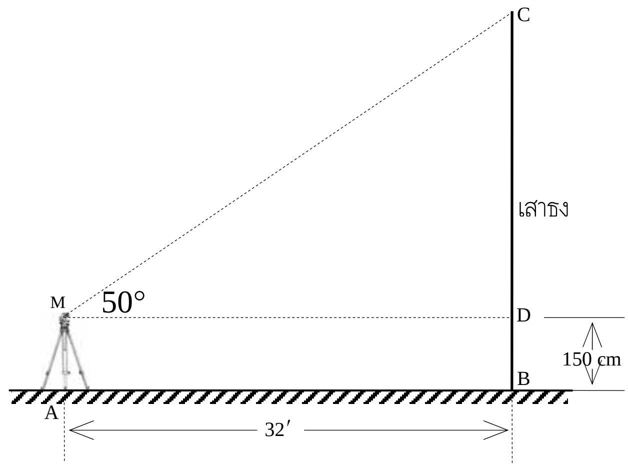
Ans

การกดแป้นบนเครื่อง Casio *fx*–3800P	ภาพที่ปรากฏบนเครื่องคำนวณ
7 • 23 ÷ 9 • 67 =	ON DEG 0.747673216
SHIFT tan⁻¹	ON DEG 36.78448078
SHIFT °’’’	ON DEG 36°47°4.13

<u>ตัวอย่าง</u> ในการรังวัดหาความสูงของเสาธงต้นหนึ่ง โดยช่างสำรวจได้ยืนห่างจากเสาธง 32′ (ฟุต) และมองไปที่ ยอดของเสาธง เป็นมุมเงย 50° อยากทราบว่า เสาธงต้นนี้จะมีความสูงเท่าใด ถ้าหากผู้รังวัดมีความสูง 150 ซม.

วิธีทำ

1. สร้างรูปเพื่อการคำนวณ (ควรพยายามสร้างรูปเพื่อการคำนวณให้ได้หากโจทย์ไม่มีรูปประกอบ)



2. ในรูป Δ MDC

$C\widehat{M}D = 50^\circ$

- แปลงระยะให้มีหน่วยตามที่โจทย์ต้องการ

MD // AB = $32' \times 0.3048$ = 9.7536 m.
MA = DB = 150 cm. = 1.50 m.

3. คำนวณหาความสูงของ เสาธง = CB

เมื่อ CB = CD + DB
= CD + 1.50 m.
และเมื่อ CD = MD tan($C\widehat{M}D$)
ดังนั้น CB = MD tan($C\widehat{M}D$) + 1.50
= 9.7536 tan(50°) + 1.50
= 13.12388784

$\therefore$ ความสูงของเสาธง = 13.124 เมตร <u>Ans</u>

การกดแป้นบนเครื่อง Casio *fx*–3800P	ภาพที่ปรากฏบนเครื่องคำนวณ
32 × • 3048 =	ON DEG 9.7536
× 50 tan + 1 • 5 =	ON DEG 13.12388784

สำหรับการแก้ปัญหาในลักษณะของสามเหลี่ยมมุมฉาก เราอาจนำเอาทฤษฎีบทที่ข้างล่างนี้ มาช่วยแก้ปัญหาก็ได้ เป็นต้น...

ถ้าให้ θ คือมุมแหลมใดๆ ของสามเหลี่ยมมุมฉากแล้ว สามารถสรุปได้ว่า...

$$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม }\theta}{\sin\theta} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม }\theta}{\cos\theta} = \text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก} \qquad \text{.................................... (2)}$$

จากทฤษฎีดังกล่าวนี้ถึง แม้ว่าจะมีประโยชน์ในการแก้ปัญหาของสามเหลี่ยมมุมฉาก แต่งานรังวัดทางสำรวจส่วนมากจะเป็นรูป สามเหลี่ยมใดๆ หรือ สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ซึ่งก็ไม่สามารถแก้ปัญหาจากทฤษฎีบทดังกล่าวข้างต้นได้สะดวก เนื่องจากไม่มีมุมใดของรูปรังวัดเป็นมุมฉากเลย จึงจำเป็นต้องนำเอากฎของ Sine หรือกฎของ Cosine เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหาดังกล่าวได้ดีกว่า

นอกจากสามเหลี่ยมที่ได้กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด ยังมีสามเหลี่ยมอีกประเภทหนึ่งตามหลักคณิตศาสตร์เรียกว่า “สามเหลี่ยมเฉียง (Oblique Triangle)" เป็นสามเหลี่ยมอีกรูปแบบหนึ่งที่เราสามารถใช้สมการตรีโกณมิติต่างๆ เข้ามาเพื่อช่วยคำนวณแก้ปัญหาของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นในลักษณะต่างๆ กัน และเราอาจกล่าวรวมได้ว่า สามเหลี่ยมใดๆ ก็ตาม ถ้าหากทราบเพียงบางส่วน เราก็สามารถคำนวณหาส่วนที่เหลือได้ รวมถึงเนื้อที่ของสามเหลี่ยมรูปนั้นด้วย ในงานคำนวณนี้สามารถแยกปัญหาได้ถึงหลายกรณีด้วยกัน เช่น

กรณีที่ 1 เมื่อทราบขนาดของมุม 2 มุม และด้าน 1 ด้าน

กรณีที่ 2 เมื่อทราบด้าน 2 ด้าน และมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านหนึ่งด้านใด

กรณีที่ 3 เมื่อทราบด้าน 2 ด้าน และมุมในระหว่างด้านทั้งสอง

กรณีที่ 4 เมื่อทราบด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม

กรณีที่ 5 เมื่อทราบเนื้อที่ ด้าน 1 ด้าน และมุมที่ปลายด้านที่รู้ 1 มุม

- เป็นต้น -

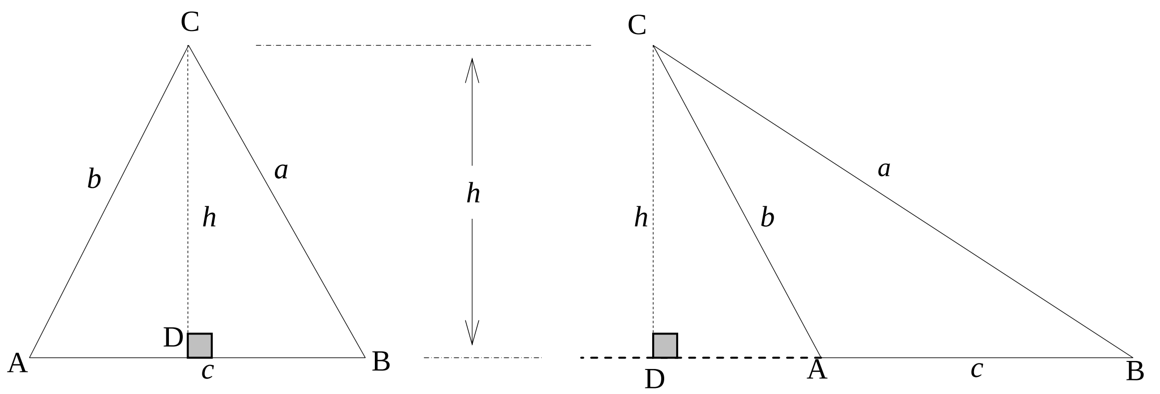
จากกรณีดังที่กล่าวมานี้ เราสามารถคำนวณหาส่วนที่ขาดหายไปได้ทุกส่วนของรูปสามเหลี่ยมรูปนั้น แต่มีข้อควรจดจำบางอย่างดังนี้

1. มุมภายในของสามเหลี่ยมต้องรวมกันได้ 180° พอดี
2. ด้านใดๆ ของสามเหลี่ยมเมื่อรวมกัน 2 ด้าน ต้องยาวกว่าด้านที่ 3 เสมอไม่ว่าจะเป็นการรวมในทิศทางใดก็ตาม

อันเป็นข้อผูกมัด หรือเงื่อนไขตามคุณสมบัติของสามเหลี่ยม ดังนั้นในการแก้ปัญหาเราจะอาศัยกฎทางตรีโกณมิติพื้นราบเข้ามาช่วย ซค่งจะขอกล่าวไว้เป็นพื้นฐานในการนำไปใช้ หรือเป็นแนวทางของความคิดเท่านั้น ผู้อ่านหรือศึกษาอาจประยุกต์ให้ดีกว่านี้ได้เสมอ

การใช้ Sine's Law ในการแก้ปัญหาสามเหลี่ยม

ก่อนอื่นเราจะกำหนดรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ให้มีมุมต่างๆ เป็น A, B, และ C ตามลำดับ โดยมีด้านตรงข้ามมุมเป็น *a*, *b*, และ *c* ตามลำดับด้วยดังรูปที่ 7–A, 7–B



รูป 7–A

รูป 7–B

รูปที่ 7 แสดงส่วนต่างๆ ของรูปสามเหลี่ยมใดๆ

จากภาพ จะเห็นได้ว่า สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป มีความสูงเท่ากับ h หรือระยะฉากจากจุดยอดมายังด้านฐานของรูปที่จุด D ซึ่งเราสามารถหาความสูงได้จากหลักการของสามเหลี่ยมมุมฉาก และหากเราสมมุติว่าทราบความยาวของ a และขนาดของมุม C จะได้ว่า

$$\sin C = \frac{h}{a} \qquad \text{ดังนั้น} \qquad h = a \cdot \sin C \qquad \text{.........} \text{(A)}$$

หรือหากเราทราบมุม A และด้าน c ก็จะได้

$$h = c \cdot \sin A \qquad \text{.........} \text{(B)}$$

สมการ (A) และสมการ (B) จะให้ขนาดของ h เท่ากัน ดังนั้นสมการทั้งสองเท่ากันด้วยนั่นคือ

$$a \cdot \sin C = c \cdot \sin A$$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

ในลักษณะเดียวกันนี้เราก็จะได้ว่า

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad \text{.........} (3)$$

ลักษณะของสมการ (3) ใช้แก้ปัญหาในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ได้สะดวก หากเราไม่ทราบได้ว่าส่วนที่หาได้นั้น มีความถูกต้องมากน้อยเพียงใด จึงต้องมีการตรวจสอบ (Checked Equation) ซึ่งมีสมการส่วนหนึ่งที่น่าสนใจ เป็นสมการตรวจสอบคำตอบของ Mollweide's Equation โดยมีรายละเอียดดังนี้

จากที่เราหาสมการ (3) ได้และเอามาใช้เพียง 1 คู่เท่านั้น คือ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

ทำการจัดเทอมใหม่ให้เป็นลักษณะเดียวกัน หรือคูณไขว้

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$$

เอา 1 ลบออกทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{a-b}{b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B}$$

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a-b}{\sin A-\sin B}$$

ดังนั้น จากสมการ (3) เราก็จะได้สมการ

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a-b}{\sin A-\sin B}$$

ดังนั้น

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$$

หากเรามาพิจารณาสมการทางขวามือ จะเป็นการรวมทางตรีโกณ ซึ่งสามารถจัดเป็นเอกลักษณ์ของการรวมสมการได้เมื่อ

$$\sin A-\sin B=2\cos\left\{\frac{A+B}{2}\right\}\sin\left\{\frac{A-B}{2}\right\}$$

ดังนั้นสมการทางขวามือจะเป็น

$$=\frac{2\cos\left\{\frac{A+B}{2}\right\}\sin\left\{\frac{A-B}{2}\right\}}{\sin 2\left(\frac{C}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left\{\frac{A+B}{2}\right\}\sin\left\{\frac{A-B}{2}\right\}}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}$$

เมื่อ C/2 และ (A+B)/2 ต่างก็เป็นมุมประกอบรวมหนึ่งมุมฉากทั้งในเทอมของ sin และ cos ในภาคเดียวกัน ดังนั้น

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left\{\frac{A-B}{2}\right\}}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)} \qquad \text{.. (4)}$$

หรือ

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left\{\frac{A-B}{2}\right\}}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)} \qquad \text{.. (5)}$$

โดยที่สมการทั้งสองนี้จัดเป็นสมการในการตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณแก้ปัญหาสามเหลี่ยมในรูปที่ดีที่สุด เนื่องจากทางซ้ายมือจะเป็นอัตราส่วนของด้านสามด้าน และทางขวามือจะเป็นอัตราส่วนทางมุมทั้งสามที่สัมพันธ์กับด้านด้วย

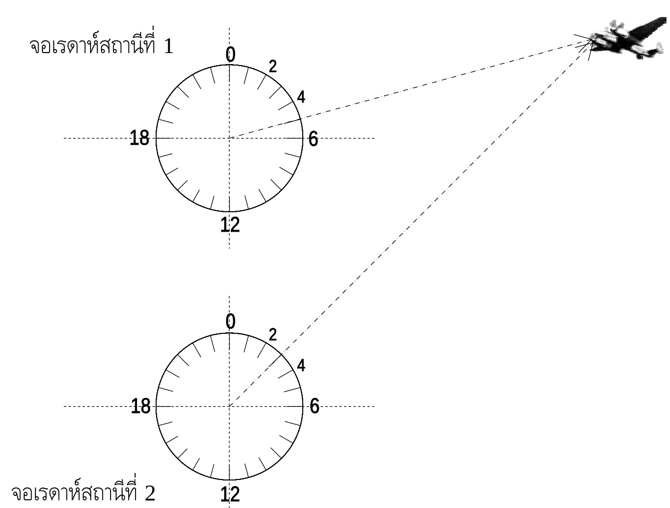
ตัวอย่างการคำนวณ

สถานีหนึ่งได้รับสัญญาณขอความช่วยเหลือจากเครื่องบินลำหนึ่ง นายสถานีได้ดูที่จอเรดาห์พบว่า เครื่องบินอยู่ที่ 5 นาฬิกาจากตำแหน่งบนจอเรดาห์ ในขณะเดียวกันอีกสถานีหนึ่งซึ่งอยู่ห่างจากสถานีแรก 100 ไมล์ที่ตำแหน่ง 12 นาฬิกาของสถานีแรกพบว่าเครื่องบินอยู่ที่ 3 นาฬิกาบนจอเรดาห์ของสถานีที่ 2 อยากทราบว่า เครื่องบินอยู่ห่างจากสถานีแรกเป็นระยะทางเท่าใด ?

<u>**วิธีทำ**</u>

1. การคำนวณเราจะให้หน้าจอเรดาห์มีลักษณะเดียวกับจานองศาชนิดกลม ซึ่งมีค่าเท่ากับ $360°$ และ 1 ชั่วโมงเท่ากับ $15°$

2. สร้างรูปเพื่อช่วยให้ความสะดวกในการคำนวณ



3. คำนวณหาความยาว AC หรือระยะทางจากเครื่องบินถึงสถานีที่ 1 จากสมการ (3)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

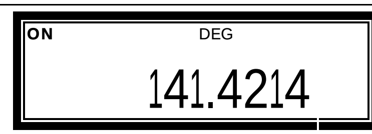
ดังนั้น

$$b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin C}$$

แทนค่า

$$b=\frac{100\cdot\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$b=141.4213562$$

การกดแป้นบนเครื่อง Casio *fx*–3800P	ภาพที่ปรากฏบนเครื่องคำนวณ
100 × 45 sin ÷ 30 sin =	

$\therefore$ เครื่องบินอยู่จะห่างจากสถานีแรกเป็นระยะทาง = 141.4214 ไมล์

Ans

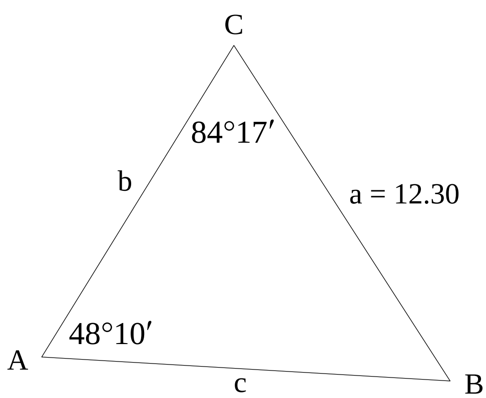
ก่อนการคำนวณทุกครั้ง เครื่องคำนวณต้องอยู่ในภาวะปกติ หรือ Mode Degree หรือ deg หรือ d เสมอ ให้สังเกตที่จอภาพบนเครื่องด้วย

ตัวอย่างการคำนวณ

กำหนดให้ a = 12.30, A = $48^\circ 10'$ และ C = $84^\circ 17'$ จงคำนวณหาส่วนที่เหลือ

วิธีทำ

1. สร้างรูปเพื่อการคำนวณ



2. จากสมการ (3) จะได้ว่า

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$$

$$c = \frac{12.3 \cdot \sin(84°17')}{\sin(48°10')}$$

$$\therefore c = 16.42601408$$

และทราบว่า

$$B = 180° - (A + C) = 47°33'$$

ดังนั้น

$$b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{16.42601408 \cdot \sin(47°33')}{\sin(84°17')}$$

$$\therefore b = 12.18078696$$

การกดเครื่อง *fx*–3800P

การกดแป้นบนเครื่อง Casio *fx*–3800P	ภาพที่ปรากฏบนเครื่องคำนวณ
AC 12 • 3 K in 1 × 84 °’’’ 17 °’’’ K in 4 sin ÷ 48 °’’’ 10 °’’’ K in 5 = K in 2 ความยาวของด้าน c	ON DEG 16.42601408
180 − K out 4 − K out 5 = K in 6 SHIFT °’’’ ขนาดของมุม B	ON DEG 47°33°0.
sin × K out 2 ÷ K out 4 sin = K in 3 ความยาวของด้าน b	ON DEG 47°33°0.

* มาถึงตอนนี้ ยังไม่ต้องกด AC นะครับ...! ให้เครื่องทำงานต่อเนื่องไปเลย ☺

3. ตรวจสอบผลการคำนวณจากสมการของ Mollweide's Equation ดังนี้

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)}$$

$$\frac{12.3 - 12.18078696}{16.42601408} = \frac{\sin\left(\frac{48°10' - 47°32'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{84°17'}{2}\right)}$$

7.25757566E–03 = 7.257575547E–03

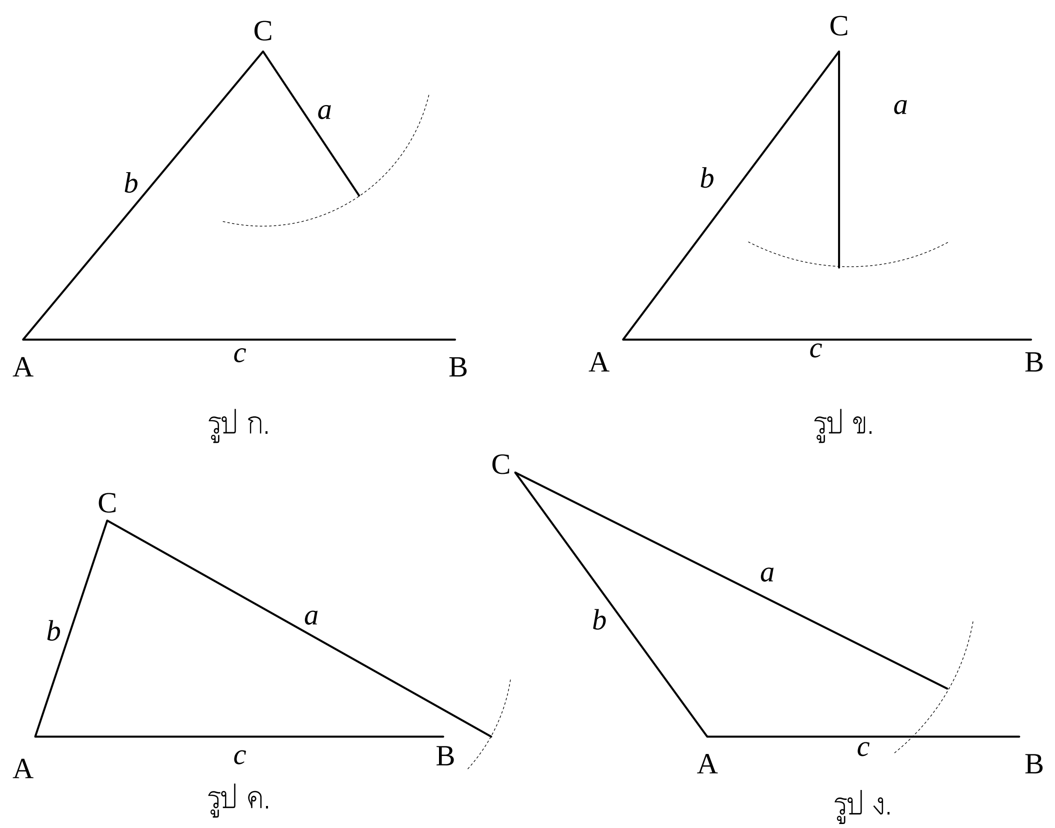
$$\therefore Error = 1.138E-10 \qquad \text{..................................... O.K.}$$

ในการคำนวณเราถือเอาตำแหน่งที่เจ็ดหลังจุดทศนิยมเป็นหลักเสมอ.

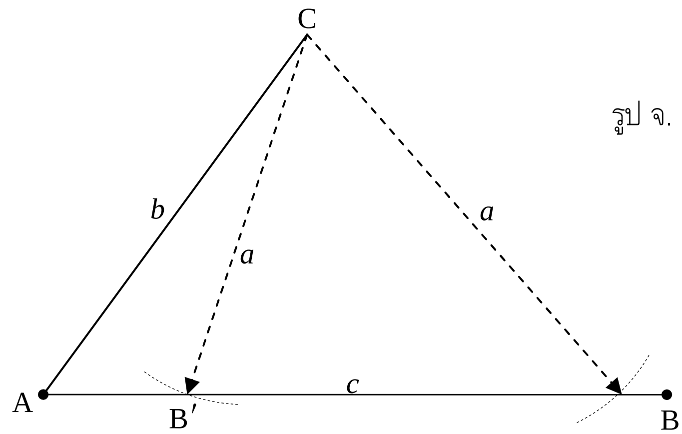
การกดเครื่องคำนวณ *fx*–3800P

การกดแป้นบนเครื่อง Casio *fx*–3800P	ภาพที่ปรากฏบนเครื่องคำนวณ
+/– + K out 1 = ÷ K out 2 = ผลรวมของสมการทางซ้ายมือ	ON DEG 7.2575761 -03
− [(--- [(--- [(--- K out 5 − K out 6 ---)] ÷ 2 ---)] sin ÷ [(--- K out 4 ÷ 2 ---)] sin ---)] ผลรวมของสมการทางขวามือ	ON DEG 7.257575555 -03
= ความคลาดเคลื่อนของการคำนวณ	ON DEG 1.138 -10

ในการคำนวณบางครั้ง เราอาจจะประสบปัญหาเกี่ยวกับ โครงสร้างของรูป ที่เราพิจารณาหรือ สามเหลี่ยมนั้นๆ ซึ่งคำตอบจะมีความถูกต้องเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้นดังภาพ



รูปที่ 8 แสดงความเป็นไปได้ของด้าน *a* เมื่อเกิดจากการคำนวณ



รูปที่ 8 แสดงความเป็นไปได้ของด้าน *a* เมื่อเกิดจากการคำนวณ (ต่อ)

ถ้าเรากำหนดให้รูปสามเหลี่ยม รู้มุม A ด้าน *a* และ ด้าน *b* โดยหลักการทางตรีโกณมิติพื้นราบ เราสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ดังนี้

1. สร้างมุม A ที่ปลายแขนของเส้นตรงด้านใดด้านหนึ่ง
2. ลาก AC ตามขนาดความยาวของ *b*
3. ให้ C เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมีเท่ากับขนาดของ *a* เขียนส่วนโค้งบนพื้นราบ ซึ่งอาจเกิดในโอกาสของความเป็นไปได้ดังนี้

3.1 รัศมี *a* สั้นกว่าความยาวของ *b* ก็จะได้รูป (ก) หากมุมที่ C มีขนาดมากกว่าหรือเท่ากับ 90° แล้วมุม B จะน้อยกว่าหรือเท่ากับ 90° ตามลำดับ ดังนั้นถ้าขนาดของ *a* ยาวน้อยกว่า *b* ก็ไม่สามารถสร้างรูปที่ต้องการ และคำนวณได้ หรือส่วนโค้งไม่สัมผัสหรือตัดกับระนาบ A เลย

3.2 หากส่วนโค้งมาสัมผัสกับระนาบของ A ที่ B ดังรูป (ข) หรือตัดกับระนาบ A ที่ B ดังรูป (ค) และ (ง) เราก็จะสามารถคำนวณหาส่วนที่เหลือตามสมการตรีโกณมิติพื้นราบได้

3.3 หากรัศมีนั้น สามารถตัดกับระนาบ A ได้ถึง สองจุด ด้วยกันดังรูป (จ) คือจุด B, B′ ซึ่งก็คือ สามเหลี่ยมสองรูป ถ้ากำหนดด้าน *a*, *b* และมุม A เราจะได้

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} \qquad \text{...} (*)$$

ขนาดของ B ที่คำนวณได้จากสมการนั้น จะเกิดมุม 2 มุมคือ B และ B′ โดย

$$B' = 180^\circ - B$$

ซึ่งค่าของ $\sin B'$ เท่ากับ $\sin B$ และมีโอกาสเป็นไปได้ทั้งสองมุม หากรวมผลรวมของ $A+B'$ และ $A+B$ มากกว่า 180° แล้วจะรู้ได้ทันทีว่าเป็นมุมที่ผิด และหากว่าสมการ (*)

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = 1$$

เราสามารถบอกได้ทันทีว่า ขนาดของ B′ และ B เท่ากับ 90° เช่นกัน

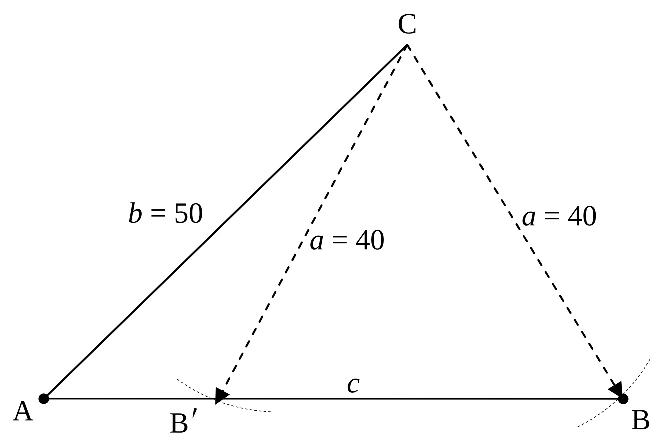
ลักษณะดังกล่าวเช่นนี้เราอาจเรียกว่า ปัญหาสามเหลี่ยมในลักษณะกำกวม หรือ Ambiguous Case คือ คำตอบที่ได้สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ สองรูป จะเป็นรูปที่ถูกรูปหนึ่ง ผิดรูปหนึ่ง หรือ ถูกทั้งสองรูป หรือผิดทั้งสองรูปเป็นต้น

ตัวอย่างการคำนวณ

กำหนดให้ A = 30°, BC = a = 40 และ AC = b = 50 จงคำนวณหาส่วนที่เหลือ

วิธีทำ

1. สร้างรูปเพื่อช่วยการคำนวณและตัดสินใจ



2. คำนวณหา B′ ในรูปสามเหลี่ยม ACB′ จากสมการ (3) จะได้

$$\sin B' = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{(50)\cdot \sin 30^\circ}{40} = 0.625$$

$$\therefore B' = \arcsin(0.625) = 38.68218745 \Rightarrow 38^\circ 40' 55.87''$$

$$= 180^\circ - 38.68218745^\circ = 141^\circ 19' 04.13''$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่ามุมของ B′ มีโอกาสเป็นไปได้ถึง 2 ค่า คือ

ค่ามุมแรก $= 38^\circ 40' 55.87''$ หรือ

ค่ามุมที่สอง $= 141^\circ 19' 04.13''$

การกดแป้นบนเครื่อง Casio *fx*–3800P	ภาพที่ปรากฏบนเครื่องคำนวณ
MODE 4 AC 50 × 30 sin ÷ 40 =	ON DEG 0.625
SHIFT $\sin^{-1}$ SHIFT °’’’	ON DEG 38°40°55.87
− 180 = SHIFT °’’’	ON DEG 141°19°4.13

3. ตรวจสอบคำตอบโดยการรวมผลกับค่าที่กำหนดให้

3.1 $A+B$ ใน ΔABC $=68°40'55.87''$

ในเมื่อ $\Delta CBB'$ เป็น Δ หน้าจั่ว ตามคุณสมบัติ จะพบว่า $B=B'$

3.2 $A+B'$ ใน $\Delta ACB' = 171°19'04.13''$

จะเห็นได้ว่า 3.1 และ 3.2 ผลรวมน้อยกว่า 180° ซึ่งก็หมายถึง คำตอบทั้งสองของ B และ B′ มีความถูกต้องเหมือนกัน

4. คำนวณหา C และ *c* จากสมการ (3) คือ

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}$$

พิจารณาในรูป ΔABC

จะพบว่า $C=180°-(A+B) \quad =111°19'04.13''$

แทนค่าลงในสมการข้างต้นจะได้

$$c \quad = \frac{(40)\cdot\sin(111°19'04.13'')}{\sin(30°)} \quad = 74.5262015$$

การกดแป้นบนเครื่อง Casio *fx*–3800P	ภาพที่ปรากฏบนเครื่องคำนวณ
MODE 4 AC 40 × 111 °’’’ 19 °’’’ 4 • 13 °’’’ ÷ 30 sin =	ON DEG 74.5262015

และพิจารณาในรูป $\Delta ACB'$

จะพบว่า $C=180°-(A+B') \quad =8°40'55.87''$

แทนค่าลงในสมการข้างต้นจะได้

$$c \quad = \frac{(40)\cdot\sin(8°40'55.87'')}{\sin(30°)} \quad = 12.07627834$$

การกดแป้นบนเครื่อง Casio *fx*–3800P	ภาพที่ปรากฏบนเครื่องคำนวณ
MODE 4 AC 40 × 8 °’’’ 40 °’’’ 55 • 87 °’’’ ÷ 30 sin =	ON DEG 12.07627834

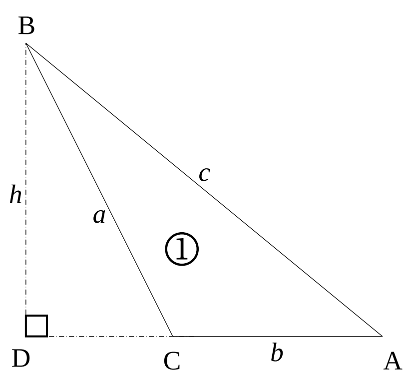
5. เราจึงสามารถสรุปได้ว่า สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปจะมีขนาดและความเป็นไปได้ดังนี้

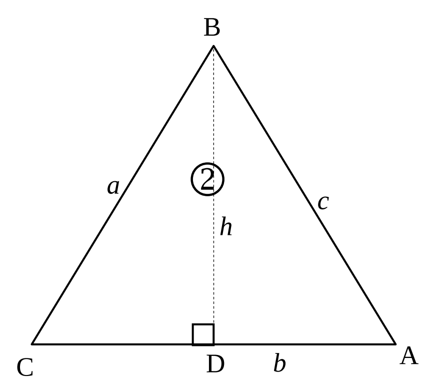
ΔABC			$\Delta ACB'$		
a	=	40	a	=	40
b	=	50	b	=	50
c	=	74.53	c	=	12.08
A	=	30°00′00″	A	=	30°00′00″
B	=	38°40′55.87″	B'	=	141°19′04.13″
C	=	111°19′04.13″	C	=	8°40′55.87″

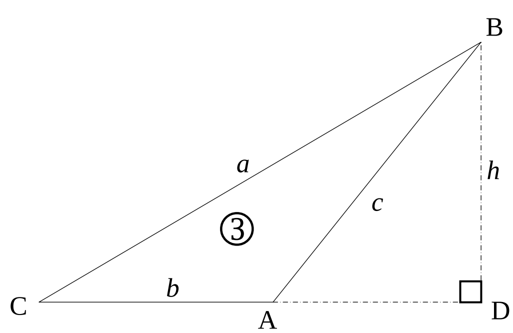
Ans

การใช้ Cosine's Law ในการแก้ปัญหาสามเหลี่ยม

การแก้ปัญหาด้วยสมการของ Sine's Law บางครั้งไม่ได้ผล เพราะอาจเกิดกรณีรูปสามเหลี่ยมซ้อน 2 รูปหรือกรณีกำกวมดังที่ได้กล่าวมาแล้ว เราอาจหันมาใช้กฎของ Cosine ดูบ้าง เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมอีกทางหนึ่ง ลองพิจารณารูปต่อไปนี้







จากรูป

จุด D เป็นจุดที่ส่วนสูง (h) ตั้งฉากกับฐานของสามเหลี่ยม ซึ่งเราอาจนำเอาทฤษฎีของ Pythagoras เข้ามาช่วยดังนี้

พิจารณารูปที่ ①

$$c^2 = h^2 + (DA)^2 \qquad \text{.. (*)}$$

แต่

$$h = a \cdot \sin C$$

$$\therefore DA = b + DC$$ (ไม่สามารถวัดได้เพราะจุด D อยู่นอกรูป)

และเราอาจใช้ $DA = b - DC$ (ในรูปที่ 2)

$$= b - (a \cdot \cos C) \qquad \text{จาก } \cos C = \frac{DA}{a}$$

แทนค่า h, DA ลงในค่าของ c จะได้

$$c^2 = (a \cdot \sin C)^2 + \{b - (a \cdot \cos C)\}^2$$

$$= a^2 \sin^2 C + b^2 - 2ab \cdot \cos C + a^2 \cos^2 C$$

$$= a^2 (\sin^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

จากเอกลักษณ์ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ สมการข้างบนจะได้เป็น

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \qquad \text{.. (6)}$$

และเราอาจกล่าวได้ว่า...

"ด้านใดๆ ของสามเหลี่ยมกำลังสองจะเท่ากับ ผลรวมของด้านที่เหลือกำลังสองอีกสองด้าน ลบด้วย สองเท่าของผลคูณของด้านที่เหลือทั้งสองกับค่า cos ของมุมในระหว่างด้านทั้งสองหรือมุมตรงข้ามกับด้านแรก"

จากสมการ (6) สามารถที่จะหามุมได้ถ้าเราทราบด้านทั้งสาม และเราจะได้สมการดังนี้

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad \text{.. (7)}$$

นั่นก็คือ...

"ค่า cos ของมุมใดๆ ของสามเหลี่ยม จะเท่ากับผลรวมของด้านประกอบมุมกำลังสองรวมกัน ลบด้วยด้านตรงข้ามมุมนั้นกำลังสอง แล้วหารด้วยสองเท่าของด้านประกอบมุมนั้น"

สำหรับสมการ (6) และ สมการ (7) นั้นผู้ใช้สามารถเปลี่ยนตัวอักษรได้ตลอดเวลา เนื่องจากการคำนวณบางครั้งอาจจะไม่ใช้ตัวอักษรตามทฤษฎี หรือเอกลักษณ์ หรือไม่ก็ต้องการในส่วนที่ไม่ตรงตามสมการเป็นต้น

ตัวอย่างการคำนวณ

กำหนดให้ a = 20, b = 30, C = 23° จงหาส่วนที่เหลือ

วิธีทำ

1. จากสมการ (6)

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \\
&= 20^2 + 30^2 - (2 \times 20 \times 30 \times \cos 23^\circ) \\
&= 195.3941758 \\
\therefore c &= \sqrt{195.3941758} \qquad = 13.97834668
\end{aligned}
$$

2. หามุม A และ B จากสมการ (7)

$$
\begin{aligned}
\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
&= \frac{20^2 + 13.97834668^2 - 30^2}{2 \times 20 \times 13.97834668} \\
&= 0.8291326 \\
\therefore A &= \arccos(0.8291326) \qquad = 33.99026207^\circ \\
&= 33^\circ 59' 24.94''
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถคำนวณหาขนาดมุมที่ B ได้คือ

$$\therefore B = 123^\circ 00' 35.06''$$

3. การตรวจสอบ สามารถตรวจสอบจากคุณสมบัติทั่วไปของสามเหลี่ยมคือ การหาผลรวมมุมภายใน ซึ่งมุมภายในของสามเหลี่ยมรวมกันต้องได้ = 180° พอดี

ผลรวม $= A + B + C \qquad = 180^\circ 00' 00''$ .... O.K.

<u>Ans</u>

การกดแป้นบนเครื่อง Casio *fx*–3800P	ภาพที่ปรากฏบนเครื่องคำนวณ
MODE 4 AC 20 K in 1 x^2 + 30 K in 2 − [(--- 2 × K out 1 × K out 2 × 23 SHIFT M in cos = ค่าของ c^2	ON M DEG 195.3941759
√ K in 3 ค่าของ c	ON M DEG 13.97834668
x^2 + K out 1 x^2 − K out 2 x^2 = ÷ [(--- 2 × K out 1 × K out 3 = ค่าของ $\cos A$	ON M DEG 0.8291326
SHIFT $\cos^{-1}$ M+ SHIFT ° ’ ” ค่าของ A	ON M DEG 33°59°24.94

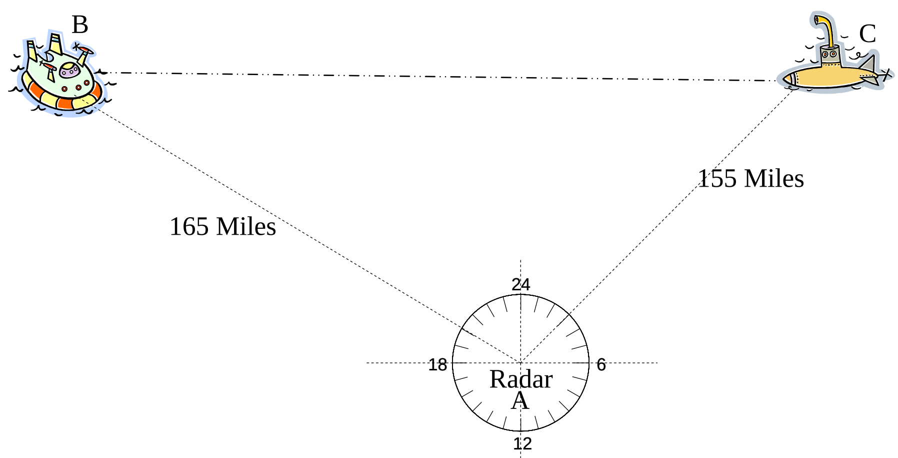
การกดแป้นบนเครื่อง Casio *fx*–3800P	ภาพที่ปรากฏบนเครื่องคำนวณ
AC K out 3 x^2 + K out 2 x^2 − K out 1 x^2 = ÷ [(--- 2 × K out 2 × K out 3 = SHIFT $\cos^{-1}$ M+ SHIFT °’’’ ค่าของ *B*	ON M DEG 123°0°35.06
MR ค่าผลรวมมุมทั้งสาม	ON M DEG 180.

ตัวอย่างการคำนวณ

เรือสองลำมีเครื่องรับ-ส่งวิทยุสำหรับสื่อสาร ซึ่งมีขีดความสามารถของรัศมีการรับ-ส่งสัญญาณถึง 200 ไมล์ สภาพอากาศทั่วไป สมมุติว่า ท่านเป็นนายสถานียามฝั่ง และเฝ้ามองตำแหน่งของเรือทั้งสองลำบนจอเรดาห์ พบว่า เรือลำแรกอยู่ที่ 3 นาฬิกา ระยะ 155 ไมล์จากสถานีชายฝั่ง และเรือลำที่สองอยู่ที่ 20 นาฬิกา ระยะ 165 ไมล์ อยากทราบว่าเรือทั้งสองจะสามารถติดต่อกันเองได้หรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

1. สร้างรูปเพื่อช่วยในการคำนวณและตัดสินปัญหา



2. พิจารณาใน ΔABC เมื่อเราทราบว่า 1 ชม. = 15° เราก็จะพบว่า

$$\hat{A} = \{(24^h - 20^h) + 3^h\} \times 15^\circ$$
$$= 105^\circ$$

AB = c = 165 ไมล์ AC = b = 155 ไมล์

แทนค่าในสมการ (6)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 165^2 + 155^2 - (2 \times 165 \times 155 \times \cos 105^\circ)$$
$$\therefore a = \sqrt{64488.59416} = 253.9460458$$

นั่นคือ ระยะทางระหว่างเรือทั้ง 2 ลำคือ 253.946 ไมล์

3. สรุปได้ว่า “เรือทั้งสองไม่สามารถติดต่อกันได้โดยตรง เนื่องจากขีดความสามารถของเครื่องรับ-ส่งวิทยุมีรัศมีสั้นกว่าระยะทางตรง จึงต้องติดต่อผ่านสถานีชายฝั่งเป็นช่วงๆ ไป”

Ans

บทสรุปการคำนวณพื้นฐาน

ในที่นี้เราอาจกล่าวได้โดยสรุปว่าการใช้ Sine's Law หรือ Cosine's Law เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหาสามเหลี่ยมนั้น จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องพิจารณารูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นเป็นสำคัญเสมอ ซึ่งการจะคำนวณหาส่วนใดส่วนหนึ่งของสามเหลี่ยมไม่จำเป็นต้องใช้เพียงกฎเดียว อาจใช้ผสมผสานกันได้ แต่มีข้อควรจำอยู่อย่างหนึ่งว่า ทุกครั้งที่มีการคำนวณจะต้องมีการตรวจสอบผลของการคำนวณเสมอและจะต้องใช้วิธีการตรวจสอบคนละแนวทางเป็นต้นว่า ใช้ sin คำนวณก็ต้องใช้ cos ตรวจสอบ หรือใช้ cos คำนวณก็ต้องใช้ sin ตรวจ หรือใช้ทั้ง sin และ cos ก็จ้องใช้ Mollweide's Equation. เป็นต้น

และเรายังอาจกล่าวได้อีกว่า.....

Sine's Law นิยมใช้คำนวณหาความยาวของด้าน Cosine's Law นิยมใช้คำนวณหาขนาดของมุม

การใช้ Tangent’s Law ช่วยแก้ปัญหาสามเหลี่ยม

การแก้ปัญหาอีกลักษณะหนึ่ง คือการใช้กฎของ tan หรือ Tangent's Law ซึ่งเกิดจากการใช้สมการของ sin คิดสูตรขึ้นมาใช้งาน จากสมการ (6) เราอาจบอกได้ว่า

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad \text{...} \quad (C)$$

หากเอา 1 ลบออกทั้งสองข้างของสมการ (C) จะได้

$$\frac{a-b}{b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin B} \quad \text{...} \quad (D)$$

หรือเพิ่ม 1 ทั้งสองข้างของสมการ (C) จะได้

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin B} \quad \text{...} \quad (E)$$

หารสมการ (D) ด้วย (E) จะได้

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} \quad \text{...} \quad (F)$$

จากเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติพื้นราบ เรารู้ว่า

$$\sin A - \sin B = 2\left\{\cos \tfrac{1}{2}(A+B)\sin \tfrac{1}{2}(A-B)\right\}$$

$$\sin A + \sin B = 2\left\{\sin \tfrac{1}{2}(A+B)\cos \tfrac{1}{2}(A-B)\right\}$$

ดังนั้นสมการ (F) จึงเป็น

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2\left\{\cos \tfrac{1}{2}(A+B)\sin \tfrac{1}{2}(A-B)\right\}}{2\left\{\sin \tfrac{1}{2}(A+B)\cos \tfrac{1}{2}(A-B)\right\}}$$

นั่นก็คือ

$$\frac{a-b}{a+b} = \cot \tfrac{1}{2}(A+B)\tan \tfrac{1}{2}(A-B)$$

หรือ

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \tfrac{1}{2}(A-B)}{\tan \tfrac{1}{2}(A+B)} \qquad \text{...} \; (8)$$

ซึ่งนั่นก็คือ กฎของ Tangent นั่นเอง โดยมีความหมายดังนี้

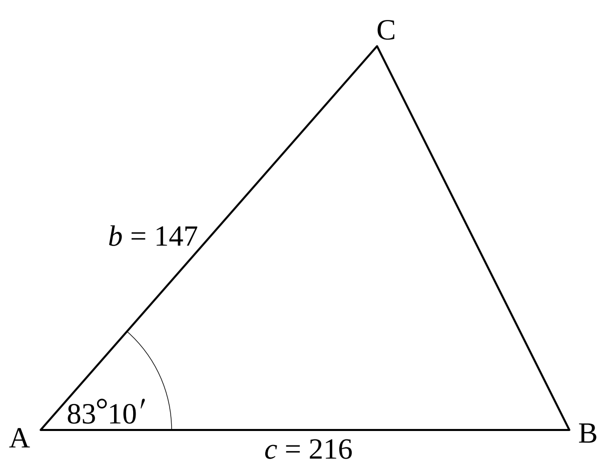
"อัตราส่วนของความต่างของด้านประกอบมุมกับผลรวมของด้านประกอบมุมนั้นจะเท่ากับ อัตราส่วนของค่า tan ของครึ่งหนึ่งของผลรวมของมุมที่อยู่ตรงข้ามด้าน กับค่า tan ของครึ่งหนึ่งของผลต่างของมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านคู่นั้น"

ตัวอย่างการคำนวณ

กำหนดให้ b = 147.0, c = 216.0, A = $83°10'$

วิธีทำ

1. สร้างรูปเพื่อพิจารณาโจทย์



2. จากรูปเราอาจแก้ปัญหาจากกฎอื่นๆ ได้แต่ขณะนี้เราจะทดลองใช้สมการ (8) หาผลลัพธ์ เมื่อโจทย์กำหนด A, *b* และ *c* มาให้ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
A+B+C &= 180^\circ \\
\tfrac{1}{2}(B+C) &= \tfrac{1}{2}(180^\circ - A) \\
&= \tfrac{1}{2}(180^\circ - 83^\circ 10') \\
\therefore (B+C) &= 48^\circ 25'
\end{aligned}
$$

3. เพื่อประกอบการใช้สมการของ Tangent จำเป็นต้องทราบขนาดของสมการทางซ้ายมือด้านบน และด้านล่าง กล่าวคือ

เทอมของ $a-b$ เราจะใช้ค่าของ $c-b=69$

เทอมของ $a+b$ เราจะใช้ค่าของ $c+b=363$

แล้วนำค่าที่ได้มาแทนลงในสมการ ซึ่งจะได้ดังนี้

$$\frac{c-b}{c+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(C-B)}{\tan\frac{1}{2}(C+B)}$$

$$\frac{69}{363} = \frac{\tan\frac{1}{2}(C-B)}{\tan(48^\circ 25')}$$

ขนาดของ $\frac{1}{2}(C-B)$ คือ

$$
\begin{aligned}
\tan\tfrac{1}{2}(C-B) &= \frac{69\tan(48^\circ 25')}{363} \\
&= 0.214220714 \\
\therefore \tfrac{1}{2}(C-B) &= \arctan(0.214220714) \\
&= 12.09119631^\circ
\end{aligned}
$$

4. คำนวณหามุม C และ B

เมื่อ

$\frac{1}{2}(C-B) = 12.09119631^\circ$

$\therefore C-B = 24.18239261^\circ$ .... (A)

และ $\frac{1}{2}(C+B) = 48.41666667^\circ$

$\therefore C+B = 96.83333333^\circ$ .... (B)

ถ้ารวมสมการ (B) ด้วย (A) จะได้

$$C = 60^\circ 30' 28.31''$$

และลบสมการ (B) และ (A) จะได้

$$B = 36^\circ 19' 31.69''$$

ตรวจสอบโดยการหาผลรวมมุมภายในสามเหลี่ยม

$A + B + C = 180°$ .... O.K.

5. คำนวณหาด้านจาก Sin's Law

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$= \frac{147 \sin(83°10')}{\sin(36°19'31.69'')}$$

$$= 246.3923506$$

6. ตรวจสอบโดยใช้สมการ Mollweide's Equation ด้วยสมการของผลรวม

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2} C}$$

$$\frac{246.3923506 + 147}{216} = \frac{\cos \frac{1}{2}(83°10' + 36°19'31.69'')}{\sin \frac{1}{2}(60°30'28.31'')}$$

$$\frac{393.3923506}{216} = \frac{\cos(23.42059816)}{\sin(30.25393149)}$$

ผลลัพธ์ทางซ้ายมือ = 1.821260882

ผลลัพธ์ทางขวามือ = 1.821260882 .... O.K.

Ans

แบบฝึกหัด

1. จงคำนวณหาส่วนที่เหลือจากกฎของ Sine's และ Cosine's จากข้อมูลในตารางข้างล่างนี้ พร้อมทั้งคำนวณตรวจสอบด้วยสมการ Mollweide's

Item	Angles of picture			Side of picture		
	A	B	C	*a*	*b*	*c*
1.1	32°14′	61°34′			48.63 m	
1.2		58°21′	76°38′			0.169 c
1.3	69°21′		1.015^{rad}			446.2 f
1.4			98.78^{gra}		45.69 m	108.2 f
1.5	0.864^{rad}				0.304 c	1.874 c
1.6		78°24′		1281 mm	4.207 f	
1.7			60.01°	56.0322 y	40.0021 y	
1.8	92.03^{gra}				42.332 m	36.252 m
1.9		110°00′		70.035 i		66.203 i
1.10			0.995^{rad}	36.253 m	38.125 m	

2. จงคำนวณหาส่วนที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมจากกฎของ Tangent จากข้อมูลต่อไปนี้

2.1 a = 842, b = 838, C = 62°20′
2.2 a = 211, c = 169, B = 1.186824 rad.
2.3 b = 4693 in., c = 119200.0 mm., A = 68.6596 gra.

3. ช่างสำรวจคนหนึ่งเดินทางจากเมือง ก ไปยังเมือง ข ด้วยระยะทาง 1.9305 ไมล์ จากนั้นเขาได้เดินทางไปยังเมือง ค โดยที่คาดคะเนว่า มุมระหว่างที่เขาไปเป็นมุม 52°40′ จากแนวทางของเมือง ก และ ข และถ้าเขาเดินทางจากเมือง ค ไปยังเมือง ก โดยเดินทางเป็นมุม 60°42′ จากแนวของเมือง ค และ ข อยากทราบว่า เขาเดินทางระหว่างเมืองใดยาวที่สุด และระยะทางต่างจากระยะทางที่สั้นที่สุดเท่าไร

4. กระทาชายนายหนึ่งขับรถยนต์ด้วยความเร็ว 90 KPH จากตำบลวังหินไปยังตำบลบ้านกรวดใช้เวลา 20 นาที จากนั้นได้ขับรถต่อไปโดยเลี้ยวซ้ายไปตามเข็มทิศ และอ่านมุมที่เข็มทิศได้ 115°30′ เพื่อจะไปยังน้ำตกแก่งกะพรือ แล้วเลี้ยวอีกเป็นมุม 109° จากแนวบ้านกรวด-น้ำตก มุ่งหน้าไปตำบลวังหิน อยากทราบว่า เขาจะใช้เวลาในการเดินทางจากที่ใดไปที่ใดสั้นที่สุด และใช้เวลาเท่าใด.

5. เด็กคนหนึ่ง เดินจากแค้มไปทางเหนือและนับก้าวได้ 1260 ก้าวตามแนวถนน จากนั้นก็หยิบเข็มทิศขึ้นมาแล้วเดินไปทางตะวันออกเฉียงตกอีก 920 ก้าว และหันเข็มทิศไปยังแค้ม จากแนวเดิมสามารถอ่านมุมได้ 62 องศา อยากทราบว่า เด็กคนนี้จะเดินเป็นระยะทางอีกกี่ก้าวจึงจะถึงแค้มที่พัก.

6. ในการวางสายโทรศัพท์จากศูนย์โทรคมนาคมที่อยู่บนยอดเขาแห่งหนึ่งลาดตามเชิงเขาลงมาเป็นมุมก้ม $28°30'$ และวัดระยะทางได้ 756.053 m. จากนั้น ทีมงานอีกชุดได้ทำการวางดุมสำหรับดึงสายบนยอดเขาอีกลูกหนึ่ง และวัดระยะลาดได้ $4012.35'$ อยากทราบว่ายอดเขาลูกนี้ ห่างจากยอดเขาอีกลูกหนึ่ง เป็นระยะทางราบเท่าไร ถ้าให้ความสูงของเขาลูกแรก จากระดับน้ำทะเลเท่ากับ 916.752 m. และระดับที่พื้นล่างจากระดับน้ำทะเลเท่ากับ 252.320 m.

7. ยาน Rooter I ได้เดินทางออกจากสถานี Zamia Tail เป็นระยะทาง 12.5 ล้านไมล์ ถึงดวงดาว TA-3352 แล้วหันหัวยานทางขวามือมุ่งหน้าไปยังสถานี Karaka A4 เป็นมุม 86.035 gra.เป็นระยะทาง 13.4 ล้านไมล์ อยากทราบว่า ยาน Rooter I จะต้องใช้เวลาในการเดินทางนานเท่าใดจากสถานี Zamia Tail ไปสถานี Karaka A4 ถ้าความเร็วของยานคงที่อยู่ที่ 850 MPH

8. Jimmy นำเครื่องร่อนออกจากสนามบิน OHIO ด้วยความเร็ว 190 MPH ในทางตรงเป็นระยะเวลา 20 นาที จากนั้นได้หันหัวเครื่องร่อนไปทางซ้ายมือจากแนวเดิมเป็นมุม 2.001275 rad. จากแผงควบคุมทิศทางในเครื่องร่อน และร่อนไปตามความเร็วของลม 250 MPH บนชั้นอากาศเป็นระยะเวลา 13 นาที อยากทราบว่า ขณะนี้เครื่องร่อนจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางกี่กิโลเมตร

9. ช่างสำรวจคนหนึ่งได้ทำการรังวัดงานสนามของโครงการหนึ่ง แต่ข้อมูลส่วนหนึ่งเกิดหายไปขณะเดินทางกลับมาสำนักงาน จึงจำเป็นต้องคำนวณหาเพื่อจะนำมาเป็นพื้นฐานของการตัดสินใจจากข้อมูลในสมุดสนามบางส่วน ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

มุมที่ราบรังวัด (AKL) $= 76°25'36''$

(LAK) $= 68°33'46''$

ระยะทางของด้านประกอบมุม KA ยาวกว่า KL = 0.253 เส้น เมื่อ A, K, L เป็นหมุดรังวัด

10. Two men started at the same time from Centerville on a trip to Metropolis. One man traveled at 45 mph on a straight but slow road connecting the towns. The other traveled on one superhighway for 37.4 mi, and then on another for 30.0 mi. His uniform speed was 60 mph and the two highways intersected at an angle of $134°$. Which man reached Metropolis first and by how long, but calculated by Tangent's Law.

11. Two streets intersect at an angle of $123°40'$. A vacant lot on the corner has $94.6'$ frontage on one street and $93.8'$ on the other. What is length of a fence across the back of the lot?

สรุปสูตรพื้นฐานทั่วไปที่นิยมใช้กัน

1. Plane Trigonometry (ตรีโกณพื้นราบ)

Function	SIN	COS	TAN	CSC	SEC	COT
$90^\circ - A$	cos A	sin A	cot A	sec A	csc A	tan A
$90^\circ + A$	cos A	− sin A	− cot A	sec A	− csc A	− tan A
$180^\circ - A$	sin A	− cos A	− tan A	csc A	− sec A	− cot A
$180^\circ + A$	sin A	− cos A	tan A	− csc A	− sec A	cot A
$270^\circ - A$	− cos A	− sin A	cot A	− sec A	− csc A	tan A
$270^\circ + A$	− cos A	sin A	− cot A	− sec A	csc A	− tan A
$360^\circ - A$	− sin A	cos A	− tan A	− csc A	sec A	− cot A
$A - 360^\circ$	sin A	cos A	tan A	csc A	sec A	cot A

csc = Cosec

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$
$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$
$$\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$$
$$\sin^2 A = (\sin A)^2$$

- ฟังชั่นความสัมพันธ์ของมุมสองมุม

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$
$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

- เอกลักษณ์ของมุม 2A

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$
$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$$
$$= 2\cos^2 A - 1$$
$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$
$$\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}$$

- เอกลักษณ์ของครึ่งหนึ่งของมุม

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$
$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$
$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$$

- เอกลักษณ์ของการรวมมุม และความสัมพันธ์

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A \pm B)\cos\tfrac{1}{2}(A \mp B)$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A + B)\cos\tfrac{1}{2}(A - B)$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\tfrac{1}{2}(A + B)\sin\tfrac{1}{2}(A - B)$$
$$\tan A \pm \tan B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}$$
$$\sin^2 A - \sin^2 B = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

sin A + sin B = 2 sin(A + B) cos(A + B)
sin A – sin B = 2 sin(A – B) cos(A – B)
cos A + cos B = 2 cos(A + B) cos(A – B)
cos A – cos B = 2 sin(A + B) sin(A – B)
tan A + tan B = $\frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$
tan A – tab B = $\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$
$\sin^2 A - \sin^2 B$ = sin(A + B) sin(A – B)
$\cos^2 A - \sin^2 B$ = cos(A + B) cos(A – B)
$\cos^2 A - \cos^2 B$ = –sin(A + B) sin(A – B)
sin A sin B = –cos(A + B) + cos(A – B)
sin A cos B = sin(A + B) + sin(A – B)
cos A cos B = cos(A + B) + cos(A – B)

- กฎของ Sine

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

- กฎของ Cosine

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

- กฎของ Tangent

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan(A-B)}{\tan(A+B)}$$

- สมการตรวจสอบของ Mollweide's

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos(A+B)}{\sin C} \quad \text{และ} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin(A-B)}{\cos C}$$